

ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМПЕРАТРИЦЫ ЕКАТЕРИНЫ
II»**

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
по предмету
МАТЕМАТИКА

2025

Основные положения программы

Программа вступительного испытания утверждена на заседании кафедры высшей математики (протокол № 2 от 11.09.2024г.).

I. Содержание, структура и форма проведения вступительного испытания

Цель вступительного испытания по математике – определение уровня подготовки абитуриентов по курсу алгебры и началам математического анализа, некоторым разделам геометрии, необходимого для овладения учебным материалом образовательной программы высшего образования.

Основное внимание на вступительном испытании **по математике** уделяется знанию основных вопросов школьного курса математики, технике алгебраических и тригонометрических преобразований, умению выполнять вычисления и решать геометрические задачи. Необходимо знать основные формулы и соотношения алгебры и геометрии; методы и приемы решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств; решать текстовые задачи на составление уравнений или систем уравнений, а также задачи с параметрами; знать таблицу производных и правила дифференцирования, в том числе сложных функций; знать таблицу неопределенных интегралов и правила интегрирования. Особое внимание уделяется навыкам последовательного и исчерпывающего изложения своих суждений в письменной форме при решении задач.

Вступительное испытание в **форме письменного экзамена** по билетам. Общее число заданий в билете – **10**.

Время, отведенное на выполнение работы – **3 часа 55 минут**.

Пользование вспомогательными материалами и калькулятором на вступительном испытании **запрещено**.

Билет вступительного испытания по математике состоит из 10 заданий. Это могут быть задания следующего типа:

- упростить алгебраическое выражение;
- решить показательное или логарифмическое уравнение;
- найти производную функции или использовать ее приложения;
- решить геометрические задачи по планиметрии и/или стереометрии;
- решить текстовую задачу на составление уравнения или системы уравнений;
- решить вероятностную задачу;
- найти решение рационального или иррационального неравенства;
- решить тригонометрическое уравнение;
- найти решение иррационального уравнения или уравнения с модулем;
- решить задачу или уравнение с параметром;
- решить систему уравнений или неравенств.

II. Разделы, рассматриваемые в ходе вступительного испытания

Раздел 1. АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель (НОД). Наименьшее общее кратное (НОК).

2. Целые числа (Z), рациональные числа $\left(\frac{p}{q}; p, q \in Z\right)$. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей. Числовая прямая. Числовые промежутки. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

3. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.

4. Степень с натуральным и рациональным показателями. Арифметический корень. Десятичные логарифмы, их свойства.

5. Одночлен и многочлен, стандартный вид многочлена. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.

6. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции. График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность; четность, нечетность.

7. Определение и основные свойства функций: линейной $y = kx + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^n$ ($n \in N$), показательной $y = a^x$, $a > 0$, логарифмической $y = \log_a x$, тригонометрических функций ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$), арифметического корня $\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$).

8. Уравнения. Множество решений уравнения. Равносильные уравнения. Неравенства. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства. Системы уравнений и неравенств. Решение систем уравнений. Множество решений системы. Равносильные системы уравнений.

9. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы). Преобразования в произведения сумм вида: $\sin a \pm \sin b$, $\cos a \pm \cos b$.

10. Определение производной функции $y = f(x)$. Ее физический и геометрический смысл. Производные от элементарных функций, основные формулы дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций. Касательная к графику функции.

11. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

12. Число e . Натуральные логарифмы.

13. Первообразная и интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площади криволинейной трапеции.

Раздел 2. ГЕОМЕТРИЯ

1. Прямая, луч, отрезок, ломанная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые.

2. Осевая и центральная симметрии. Параллельный перенос. Поворот.
3. Выпуклые фигуры. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Оси и центры симметрии многоугольников. Треугольник, его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Средняя линия треугольника. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.
4. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус окружности. Касательная к окружности. Дуга окружности. Круговой сектор. Центральные и вписанные углы. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь кругового сектора.
5. Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.
6. Площадь многоугольника. Формулы площадей фигур: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).
7. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.
8. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве, от точки до плоскости и между скрещивающимися прямыми.
9. Угол между прямыми в пространстве, между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями.
10. Многогранники: призма, пирамида. Объем и площадь поверхности многогранников.
11. Тела вращения: цилиндр, конус, сфера. Объем и площадь поверхности тел вращения.

III. Критерии оценивания экзаменационных работ

Оценивание каждой задачи происходит в соответствии с критериями:

10 баллов	Задача решена правильно, ход решения правильный и обоснованный.
8–9 баллов	Задача решена в целом правильно и получен верный ответ, но есть мелкие замечания к решению (в решении допускаются незначительные неточности; имеются недостатки, которые легко устраняются; не рассмотрены простые частные случаи).
5–7 баллов	Задача решена «наполовину», т.е. ход решения правильный, есть значительный прогресс в решении, но полное решение требует дополнительных существенных идей.
3–4 балла	Выбранный ход решения задачи является в принципе правильным, но при этом не реализован в силу серьезных ошибок; приведены вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1–2 балла	Задача не решена, но рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0 баллов	Решение задачи неправильное и не содержит идей, с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась.

Итог подводится по сумме баллов, набранных абитуриентом.

100 баллов – максимальное количество баллов, которые может набрать абитуриент.

IV. Методические указания по подготовке и выполнению вступительного испытания

При выполнении преобразований алгебраических выражений необходимо знать правила раскрытия скобок и действий с дробями, формулы сокращенного умножения, свойства степени с рациональным показателем. Обосновывать действия, приводящиеся на каждом этапе преобразований.

Пример 1. Вычислить $\sin 15^\circ - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 30^\circ)} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{8}((\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1^2)} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{1}{8}(\sqrt{3} - 1)^2} - \sqrt{2} \frac{\sqrt{3} - 1}{4} = 0\end{aligned}$$

Ответ. 0.

При решении уравнений и неравенств необходимо владеть различными приемами: приведением уравнения или неравенства к стандартному виду, использованием свойств функций, применением графических иллюстраций и аналитических выкладок; понятием равносильности уравнений (неравенств). При решении рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений или неравенств рекомендуется придерживаться следующей схемы: указать область допустимых значений, решить уравнение с указанием замены переменной (если это необходимо), сделать проверку. При решении уравнений или неравенств, содержащих знак модуля, необходимо учитывать все случаи, возникающие при раскрытии модуля. При решении иррационального уравнения (неравенства) следует помнить, что при возведении обеих частей в нечетную степень всегда получается уравнение (неравенство) равносильное исходному. При возведении в четную степень, полученное уравнение (неравенство) будет иметь тот же смысл лишь в том случае, если обе части исходного уравнения (неравенства) неотрицательны. Поэтому, при решении уравнения рекомендуется выполнять проверку для определения посторонних корней. При решении показательных, логарифмических уравнений и неравенств необходимо помнить свойства степеней и логарифмов, основное логарифмическое тождество, приемы решения простейших уравнений и методы приведения к ним. При решении неравенств необходимо обратить внимание на смену знака неравенства в случае, если основание степени или логарифма находится в интервале $(0; 1)$. При записи ответа при решении неравенства необходимо учесть значения

границ получившегося промежутка. При решении тригонометрических уравнений рекомендуется привести тригонометрические формулы и формулы приведения, использованные при решении; в ответе указать все решения с учетом периодичности тригонометрических функций.

При решении задач на экстремумы функции или на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке необходимо применять следующий алгоритм: указать область допустимых значений функции, найти ее производную и критические точки функции (необходимое условие экстремума); используя достаточное условие экстремума определить точки минимума и максимума функции, входящие в область допустимых значений. Вычислить значения функции для отобранных точек и на концах отрезка, выбрать наибольшее и наименьшее значения из них.

Решение задачи на составление уравнения или системы уравнений рекомендуется перевести условие задачи на математический язык, а затем решить полученное уравнение (или систему уравнений) и записать ответ с учетом размерности переменных.

Пример 2. На нефтеперерабатывающем заводе емкость была заполнена сырой нефтью с концентрацией серы 1,5%. Часть этой нефти была направлена на производство, а в емкость долили такое же количество нефти с концентрацией серы 0,5%. Затем снова на производство было направлено то же количество нефти, что и в предыдущий раз, но долили нефть с концентрацией серы 2%. В итоге, концентрация серы в нефти в емкости стала прежней. Опередить, какую часть нефти из емкости дважды отправляли на производство.

Решение.

Обозначим за x долю нефти, которую дважды отправляли на производство ($x > 0$). Тогда уравнение баланса количества серы в нефти будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1,5}{100} - \frac{1,5}{100}x + \frac{0,5}{100}x - \left(\frac{1,5}{100} - \frac{1,5}{100}x + \frac{0,5}{100}x \right)x + \frac{2}{100}x = \frac{1,5}{100},$$

где $\frac{1,5}{100} - \frac{1,5}{100}x + \frac{0,5}{100}x$ – концентрация серы в нефти после первого долива нефти в емкость.

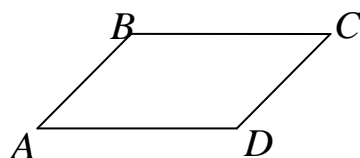
Умножив обе части уравнения на 100, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение $x^2 - 0,5x = 0$. Условию $x > 0$ удовлетворяет только корень уравнения $x = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

При решении геометрической задачи необходимо сделать схематический рисунок, отражающий содержание рассматриваемой задачи. На рисунке нанести все необходимые обозначения, используемые в задаче.

Пример 3. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найти стороны параллелограмма, если одна сторона на 3 см больше другой.

Решение. 1. Нарисуем параллелограмм $ABCD$.



2. Используя свойства параллелограмма, имеем: $P = 2AB + 2DC$,

Пусть $AB = CD = x$, $BC = AD = x + 3$.

Тогда, $48 = 2x + 2(x + 3)$, $4x = 42$, $x = 10,5$.

$BC = AD = 10,5 + 3 = 13,5$.

Ответ. 10,5 см и 13,5 см.

V. Рекомендованный библиографический список.

Основная литература

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: Учеб. для общеобраз. организаций: базовый и углубл. Уровни / Алимов Ш.А. и др. – М.: Изд-во «Просвещение», 2020. – 463 с.

2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: Учеб. для общеобраз. организаций: базовый и углубл. Уровни / Атанасян Л.С. и др. – М.: «Просвещение», 2020. – 287 с.

3. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. пособ. для 10-11 кл. общеобраз. организаций / А. Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 2019. – 384 с.

4. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы: Учеб. для общеобраз. учреждений. – М.: Просвещение, 2017. – 240 с.

5. Погорелов А.В. Геометрия. 10–11 классы: Базовый уровень. Инженерный курс: учебное пособие – М.: Просвещение, 2018. – 175 с.

6. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / под ред. М.И. Сканави. – М.: АСТ, 2019. – 608 с.

Дополнительная литература

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие/ 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2008. – 495 с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ, Астрель, 2006. – 509 с.

3. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – 4-е изд. – М.: Оникс, 2011. – 416 с.

4. Дорофеев Г.В. Математика для поступающих в ВУЗы: Пособие. — 4-е изд., стереотип. — М.: Дрофа. 2001. — 672 с.

5. Дорофеев Г.В. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по математике и алгебре и началам анализа за курс средней школы. 11 класс. – М.: Дрофа, 2008. – 160 с.

6. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 352 с.

Базы данных, информационно-справочные системы

1.	ALEXLARIN.NET	http://alexlarin.net/
2.	AB Alleng	http://www.alleng.ru
3.	Открытый банк заданий ЕГЭ по математике	http://mathege.ru
4.	МИФИст	http://live.mephist.ru/show/mathege2010/
5	Федеральный институт педагогических измерений	http://www.fipi.ru/
6	Официальный информационный портал ЕГЭ	http://ege.edu.ru/