ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА

Санкт-Петербург
2020

УДК 004

МАТЕМАТИКА: Методические указания для вступительного испытания по предмету Математика / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Л.В. Бакеева*. СПб., 2020. 69 с.

Методические указания составлены для абитуриентов, поступающих в Санкт-Петербургский горный университет по результатам вступительных испытаний, проводимых в письменной форме для следующих категорий граждан:

− детей-инвалидов, инвалидов;

− иностранных граждан;

− лиц, получивших документ о среднем общем образовании в течение одного года до дня завершения приема документов и вступительных испытаний включительно, если все пройденные ими в указанный период аттестационные испытания государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования сданы не в форме ЕГЭ (либо они прошли итоговые аттестационные процедуры в иностранных образовательных организациях и не сдавали ЕГЭ в указанный период);

− лиц, прошедших государственную итоговую аттестацию по отдельным общеобразовательным предметам в форме государственного выпускного экзамена, при условии, что они получили документ о среднем общем образовании в течение одного года до дня завершения приема документов и вступительных испытаний включительно и в этот период не сдавали ЕГЭ по соответствующим общеобразовательным предметам;

− лиц, поступающих на базе среднего профессионального образования.

Основное назначение настоящих методических указаний – дать абитуриенту достаточно полное представление об уровне и специфике требований вступительного испытания по математике для поступления в Горный университет.

Методические указания включают теоретические сведения, методы решения задач и примеры заданий по математике, по содержанию и трудности, приближенные к экзаменационным заданиям.

Научный редактор проф. *А.П. Господариков*

Введение

Основное внимание на вступительном испытании по предмету Математика уделяется знанию основных вопросов школьного курса математики, технике алгебраических и тригонометрических преобразований, умению выполнять необходимые вычисления, решать геометрические задачи.

Необходимо знать соотношения основных формул алгебры и геометии; методы и приемы решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств. Уметь решать текстовые задачи на составление уравнений или систем уравнений, а также задачи с параметрами; знать таблицу производных и правила дифференцирования, в том числе сложных функций; знать таблицу неопределенных интегралов и правила интегрирования. Особое внимание уделяется навыкам последовательного и исчерпывающего изложения своих суждений в письменной форме при решении задач.

Методические указания разработаны на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования.

1. Содержание, структура и форма проведения вступительного испытания

Вступительное испытание по математике проводится только в письменной форме.

Каждый билет содержит 10 заданий, связанных с преобразованием алгебраического выражения, решением алгебраического, иррационального, тригонометрического, показательного, логарифмического уравнений и неравенств (или их систем); задачи на прогрессии, на применение производной, по геометрии, текстовые задачи и задачи с параметрами.

Все числовые ответы должны быть приведены точно, поэтому не нужно переводить обыкновенные дроби в десятичные дроби и наоборот. В решении задач не требуется приводить пространные словесные пояснения, но следует выполнить все необходимые математические выкладки.

В целом, уровень предлагаемых заданий не выходит за рамки программы средней общей образовательной школы. Типовые примеры дают представление об уровне требований, предъявляемых к поступающим в Горный университет.

Время, отведенное на выполнение работы, 3 часа 55 минут.

2. Разделы, рассматриваемые в ходе вступительного испытания

Раздел 1. Арифметика, алгебра и начала анализа

1.1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель (НОД). Наименьшее общее кратное (НОК).

1.2. Целые числа (Z), рациональные числа $\left(\frac{p}{q};\ p,q \in Z\right)$. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей. Числовая прямая. Числовые промежутки. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

1.3. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.

1.4. Степень с натуральным и рациональным показателями. Арифметический корень. Десятичные логарифмы, их свойства.

1.5. Одночлен и многочлен, стандартный вид многочлена. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.

1.6. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения и множество значений функции. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, чётность, нечётность.

1.7. Определение и основные свойства функций: линейной $y = kx + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^n$ $(n \in N)$, показательной $y = a^x$, $a > 0$, логарифмической $y = \log_a x$, тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, обратно тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, арифметического корня $\sqrt[n]{x}$ $(n \in N)$.

1.8. Уравнения. Множество решений уравнения. Равносильные уравнения. Неравенства. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства. Системы уравнений и неравенств. Решение систем уравнений. Множество решений системы. Равносильные системы уравнений.

1.9. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы). Преобразования в произведения сумм вида: $\sin a \pm \sin b$, $\cos a \pm \cos b$.

1.10. Определение производной функции $y = f(x)$. Ее физический и геометрический смысл. Производные от элементарных функций, основные формулы дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций. Касательная к графику функции.

1.11. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

1.12. Число e. Натуральные логарифмы.

1.13. Первообразная и интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площади криволинейной трапеции.

Раздел 2. Геометрия. Планиметрия

2.1. Прямая, луч, отрезок, длина отрезка, ломанная. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые.

2.2. Осевая и центральная симметрии. Параллельный перенос. Поворот.

2.3. Выпуклые фигуры. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Оси и центры симметрии многоугольников. Треугольник, его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Средняя линия треугольника. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

2.4. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус окружности. Касательная к окружности. Дуга окружности. Круговой сектор. Центральные и вписанные углы. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь кругового сектора.

2.5. Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.

2.6. Площадь многоугольника. Формулы площадей фигур: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).

2.7. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

3. Методические указания к решению задач вступительного испытания

3.1. Натуральные, целые и действительные числа

Натуральными числами называются числа, которые используются для счета или нумерации предметов: 1, 2, 3, … . Множество натуральных чисел обозначается символом ***N.***

Понятие *множество* относится к простейшим неопределяемым понятиям, которое понимается как совокупность некоторых объектов. Эти объекты, составляющие множество, называются его *элементами*. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Если x элемент множества A, то обозначают $x \in A$.

Таким образом, запись $n \in N$ означает, что число n – натуральное.

Добавив к множеству натуральных чисел число ноль и отрицательные целые числа, получим множество целых чисел: 0, ± 1, ± 2, ± 3, … , обозначаемое символом *Z*, включающее в себя множество натуральных чисел, то есть $N \subset Z$.

Рациональными числами называются числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое, n – натуральное число, то есть $m \in Z$, $n \in N$.

Любое рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Множество рациональных чисел обозначается символом ***Q***, включающее в себя множество целых чисел, то есть $Z \subset Q$.

Иррациональные числа – это числа, которые не могут быть представлены в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$. Иррациональные числа представляют собой бесконечные непериодические десятичные дроби.

Множество *действительных* или *вещественных* чисел ***R*** состоит из рациональных и иррациональных чисел, то есть является их объединением.

Действительные числа изображаются точками числовой оси. Любому действительному числу соответствует единственная точка числовой оси, и каждая точка числовой оси изображает единственное действительное число (Рис. 1).

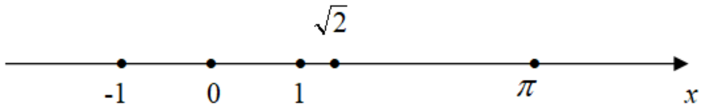


Рис. 1

3.2. Действия с дробями

3.2.1 Сложение и вычитание

Для того чтобы сложить или вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить или вычесть их числители, оставив знаменатель без изменения:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Для того чтобы сложить или вычесть дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести эти дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

3.2.2 Умножение и деление

Для того чтобы умножить дробь на дробь, нужно числитель и знаменатель одной дроби соответственно умножить на числитель и знаменатель другой дроби:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Для того чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель – на числитель, то есть первую дробь надо умножить на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

3.3. Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{b^2+8b+16}{b}\left(\frac{b}{(b+4)^2}+\frac{b}{16-b^2}\right)+\frac{8}{b-4}.$$

Решение. Воспользуемся формулами сокращенного умножения и приведем выражение в скобках к общему знаменателю, поменяв знак перед вторым слагаемым:

$$\frac{(b+4)^2}{b}\left(\frac{b}{(b+4)^2}-\frac{b}{(b+4)(b-4)}\right)+\frac{8}{b-4}=$$
$$=\frac{(b+4)^2}{b}\left(\frac{b(b-4)-b(b+4)}{(b+4)^2(b-4)}\right)+\frac{8}{b-4}=$$
$$=\frac{(b+4)^2}{b}\cdot\frac{b^2-4b-b^2-4b}{(b+4)^2(b-4)}+\frac{8}{b-4}=\frac{-8b}{b(b-4)}+\frac{8}{b-4}=$$
$$=-\frac{8}{b-4}+\frac{8}{b-4}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 2. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}.$$

Решение. Сначала упростим каждый из сомножителей и избавимся от отрицательных степеней, учитывая, что $x^{-1}=\dfrac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}};$$

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\frac{x+y}{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})}.$$

Далее, пользуясь формулами $xy=(\sqrt{xy})^2$ и $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x-2\sqrt{xy}+y$, получим

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\,\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$
$$=\frac{x+y}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$
$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

3.4. Модуль числа

Модулем или *абсолютной величиной* действительного числа a называется такое число $|a|$, что имеет место следующее равенство:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|-2| = 2, |1| = 1.$

Для модуля действительного числа справедливы следующие соотношения:

1. $|a| \geq 0$;
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
3. $|a| = |-a|$;
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0$;
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

С геометрической точки зрения модуль числа a равен *расстоянию* от точки, изображающей a на числовой оси, до точки отсчета.

3.5. Линейная функция, квадратичная функция, их графики

3.5.1. Линейная функция

Если a и b – некоторые фиксированные вещественные числа, то выражение $y = ax + b$, где x – произвольное вещественное число (независимая переменная), задает *линейную функцию*. Кратко можно записать $y = ax + b : R \to R$.

График линейной функции для разных коэффициентов a и b может иметь вид, изображенный на Рис. 2 – 7.

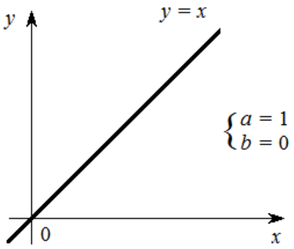


Рис. 2

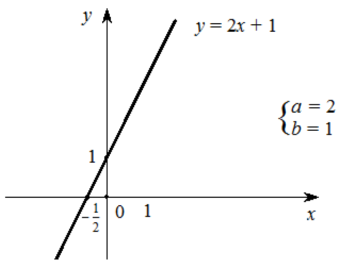


Рис. 3

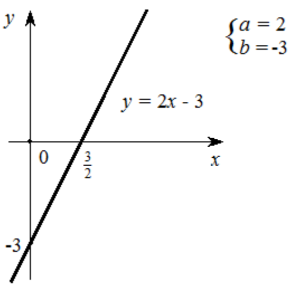


Рис. 4

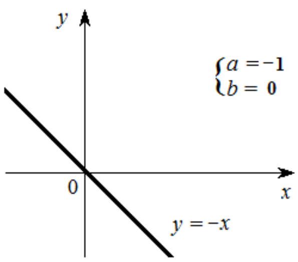


Рис. 5

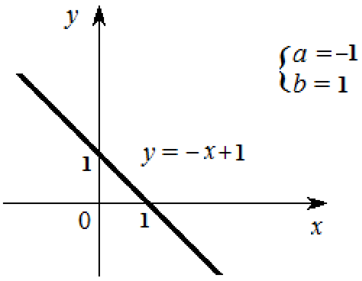


Рис. 6

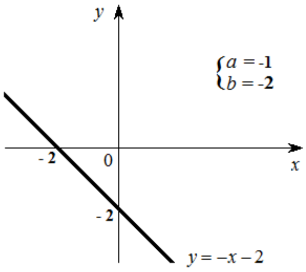


Рис. 7

Во всех указанных случаях ($a \neq 0$) множеством значений *E (x)* функции $y = ax + b$ является вся вещественная ось *R*.

При $a = 0$ линейная функция превращается в постоянную $y = b : R \to \{b\}$, область определения которой – вся числовая ось, а множество значений – одно число *b*. График такой функции при $\begin{cases} a = 0, \\ b = 3 \end{cases}$ (Рис. 8)

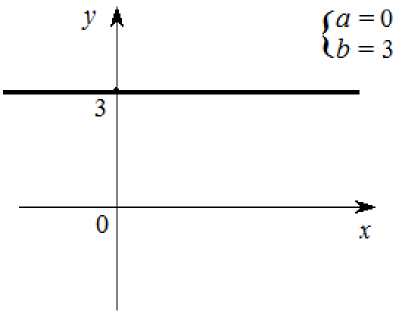


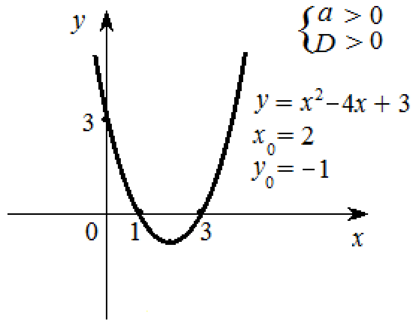
Рис. 8

3.5.2. Квадратичная функция

Если $a \neq 0, b, c$ – вещественные числа, то выражение $y = ax^2 + bx + c : R \to R$ задает *квадратичную функцию*. Её свойства и график зависят от знака и значений коэффициентов a, b, c, и от величин *b* и *c*. Число $D = b^2 - 4ac$ называется ее *дискриминантом.*

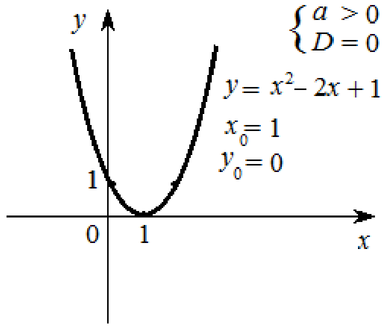
Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является *парабола* с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{2a}\right)$, симметричная относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$. Корнями функции (в случае *D*>0) являются числа $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если *D*=0, парабола касается оси *Ox* в точке $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$, то есть функция имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$. При *D*<0 график функции не пересекает ось *Ox*.

Возможные варианты расположения графика квадратичной функции изображены на Рис. 9-14.



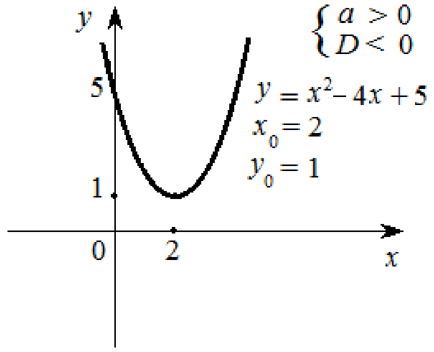
$E(x) = [-1;+\infty)$

Рис. 9



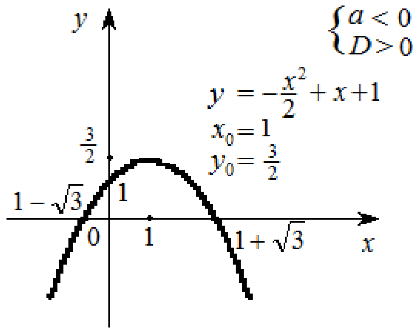
$E(x) = [0;+\infty)$

Рис. 10



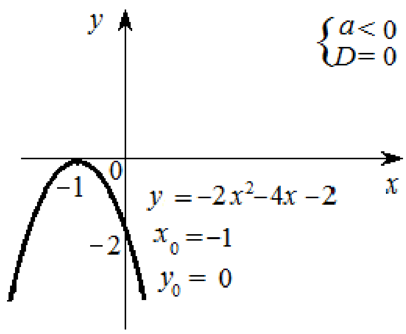
$E(x) = [1;+\infty)$

Рис. 11



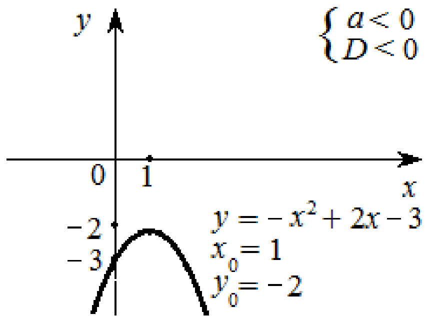
$E(x) = \left[-\infty;\frac{3}{2}\right)$

Рис. 12



$E(x) = [-\infty;0)$

Рис. 13



$E(x) = [-\infty;-2)$

Рис. 14

3.6. Линейные уравнения и уравнения с модулем

Линейным уравнением (уравнением *первой степени* с одним неизвестным) называется уравнение вида $ax + b = 0$ при $a \neq 0$. Линейное уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Пример 3. Решить уравнение $0{,}5(x-1) + \dfrac{3x}{2} - 0{,}75 = 0{,}25(3-2x) + \dfrac{5}{4}$.

Решение. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим линейное уравнение: $2{,}5x - 3{,}25 = 0$. Корень уравнения $x = 3{,}25 : 2{,}5 = 1{,}3$.

Ответ: 1,3.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{1}{6}x-\frac{5}{12}(2x+3)+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}(6-3x)+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}x.$

Решение. Выполнив преобразования, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим: $0\cdot x-6\frac{1}{3}=0$ или $0\cdot x=6\frac{1}{3}$. То есть, ни при каком значении x это уравнение не станет верным числовым равенством. Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 5. Решить уравнение $7x+16\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{5}\right)=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}x\right)+15x.$

Решение. После преобразований приходим к уравнению $0\cdot x+0=0$, которому удовлетворяют любые действительные числа, то есть $x\in R$.

Ответ: $x\in R$.

Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, основано на определении модуля (абсолютной величины) действительного числа. Простейшее уравнение $|x|=a$ имеет решение только при условии $a\ge 0$:

при $a>0$ исходное уравнение имеет два решения (корня) $\left[\begin{array}{l} x=-a, \\ x=a; \end{array}\right.$

при $a=0$ уравнение имеет один единственный корень $x=0$.

Пример 6. Решить уравнение $|2x+5|=1$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} 2x+5=1, \\ 2x+5=-1. \end{array}\right.$

Получим $\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Итак, данное уравнение имеет два решения, которые можно записать в виде множества, расположив корни в порядке возрастания: $\{-3;-2\}$.

Ответ: $\{-3;-2\}$.

Пример 7. Решить уравнение $|5-2x|-|x+2|=3$.

Решение. Используя определение модуля числа и свойство $|-a|=|a|$, получим:

$$|5-2x|=|2x-5|=\begin{cases} 2x-5, \ 2x-5\ge 0 \text{ или } x\ge 2\frac{1}{2}, \\ -2x+5, \ 2x-5<0 \text{ или } x<2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, \ x+2\ge 0 \text{ или } x\ge -2, \\ -x-2, \ x+2<0 \text{ или } x<-2. \end{cases}$$

Точками $x=-2$ и $x=2\frac{1}{2}$ числовая ось разбивается на три интервала: $(-\infty;-2)$, $\left[-2;2\frac{1}{2}\right)$, $\left[2\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Рассмотрим уравнение на каждом из них.

1) $(-\infty;-2)$, то есть $x<-2$.

На этом интервале $|5-2x|=|2x-5|=-2x+5$, $|x+2|=-x-2$.

Уравнение примет вид: $-2x+5-(-x-2)=3, -2x+5+x+2=3, -x=-4, x=4$. Но число 4 не принадлежит интервалу $(-\infty;-2)$, поэтому не является решением уравнения.

2) $\left[-2;2\frac{1}{2}\right)$, то есть $-2\le x<2\frac{1}{2}$.

На этом интервале $|5-2x|=|2x-5|=-2x+5$ и $|x+2|=x+2$.

Уравнение примет вид: $-2x+5-(x+2)=3, -2x+5-x-2=3, -3x=0, x=0$. Этот корень принадлежит рассматриваемому промежутку и поэтому является корнем уравнения.

3) $\left[2\frac{1}{2};+\infty\right)$, то есть $x\ge 2\frac{1}{2}$.

На этом промежутке $|5-2x|=|2x-5|=2x-5, |x+2|=x+2.$

Уравнение примет вид: $2x-5-(x+2)=3, 2x-5-x-2=3, x=10, 10\in(-\infty;-2)$, поэтому является решением уравнения.

Итак, $x=0$ и $x=10$, то есть данное уравнение имеет два корня. Запишем их в виде множества: $\{0;10\}$.

Ответ:$\{0;10\}$.

3.7. Линейные неравенства и неравенства с модулем

Линейным неравенством называется неравенство одного из видов: $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b\le 0$ при $a\ne 0$. При решении неравенств следует помнить, что при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Если рассмотреть неравенство вида $ax+b>0$, то при $a>0$ оно равносильно неравенству $x>-\frac{b}{a}$, то есть множеством его решений является интервал $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$. При $a<0$ оно равносильно неравенству $x<-\frac{b}{a}$, и множеством его решений является интервал $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$. Неравенства других видов решаются аналогично.

Пример 8. Решить неравенство $2x-3+4(1-x)-5\le x+2(3x-1)$.

Решение. Раскрыв скобки и применив свойства неравенств, получим $2x-3+4-4x-5\le x+6x-2$, $-9x\le 2$, $x\ge-\frac{2}{9}$. Значит, множество решений этого неравенства – промежуток $\left[-\frac{2}{9};+\infty\right)$. Ответ можно записывать либо в форме неравенства $x\ge-\frac{2}{9}$, либо в виде промежутка числовой оси $x\in\left[-\frac{2}{9};+\infty\right)$.

Ответ:$\left[-\frac{2}{9};+\infty\right)$.

Пример 9. Решить неравенство $4(x-1)+2(3-x)-5>-4(1-x)-2x+9$.

Решение. В результате преобразований получим $2x-3\ge 2x+5$, откуда $0\ge 8$. Поскольку получено неверное числовое неравенство, исходное неравенство не имеет решений, иначе: множество решений – пустое множество или $\varnothing$.

Ответ: $\varnothing$.

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используют определение, свойства и геометрический смысл модуля числа.

Рассмотрим простейшее неравенство $|x| \le a$. При $a < 0$ неравенство не имеет решений. Если $a \ge 0$, то данное неравенство равносильно двойному неравенству $-a \le x \le a$ или системе неравенств:

$$\begin{cases} x \le a, \\ x \ge a. \end{cases}$$

Таким образом, множество решений этого неравенства – отрезок $[-a; a]$, то есть множество точек числовой оси, удаленных от точки $x = 0$ не более, чем на *а*. При $a = 0$ решение неравенства $x = 0$.

Рассмотрим также простейшее неравенство $|x| \ge a$.

Если $a \le 0$, то множество решений неравенства – множество всех чисел числовой оси ***R*** или $(-\infty; +\infty)$; если $a > 0$, то неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x \ge a, \\ x \le -a. \end{array}\right.$$

В последнем случае множество его решений – объединение двух промежутков $(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, то есть множество всех точек числовой оси, удаленных от точки $x = 0$ не менее, чем на *а*.

Аналогичные рассуждения применяем и для неравенств вида $|ax + b| \le c$ и $|ax + b| \ge c$, где *a*, *b*, и *c* – действительные числа.

Пример 10. Решить неравенство $|2x - 3| < 4$.

Решение. Это неравенство равносильно двойному неравенству $-4 < 2x - 3 < 4$.

Прибавив число 3 к каждой части неравенства и разделив на 2, получим $\frac{-1}{2} < x < \frac{7}{2}$.

Интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ и будет решением неравенства, то есть $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Пример 11. Решить неравенство $|2x - 3| \ge 4$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 3 \ge 4, \\ 2x - 3 \le -4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \ge 3\frac{1}{2}, \\ x \le -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

В этом случае решением неравенств будет объединение двух бесконечных интервалов $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[3\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то есть $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[3\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[3\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Пример 12. Решить неравенство $|x + 2| - |x - 6| \le 7$.

Решение. Для решения этого неравенства разобьем числовую ось на три промежутка точками $x=-2,\ x=6$ и рассмотрим неравенство на каждом из них.

1) $(-\infty;-2)$, то есть $x<-2$.

На этом интервале $|x+2|=-x-2;\ |x-6|=6-x$.

Исходное неравенство примет вид: $-x-2-(6-x)\le 7,\ \ -x-2-6+x\le 7,\ \ -8\le 7$. Это очевидное неравенство, значит, неравенство выполняется на всем интервале $(-\infty;-2)$, то есть $x\in(-\infty;-2)$.

2) $[-2;6)$, то есть $-2\le x<6$.

На этом промежутке имеем: $|x+2|=x+2$, $|x-6|=6-x$.

Неравенство имеет вид: $x+2-(6-x)\le 7$, $x+2-6+x\le 7$, $2x\le 11$, $x\le 5\frac{1}{2}$.

Учитывая рассматриваемый промежуток, получим систему: $\begin{cases}-2\le x<6,\\ x\le 5\frac{1}{2}.\end{cases}$

То есть $x\in\left[-2;5\frac{1}{2}\right]$.

3) $[6;+\infty)$, то есть $x\ge 6$.

На этом промежутке $|x+2|=x+2$; $|x-6|=x-6$.

Неравенство примет вид: $x+2-(x-6)\le 7$, $x+2-x+6\le 7$, $8\le 7$. Получили ложное неравенство, значит, на указанном промежутке решений нет, то есть $x\in\varnothing$.

Таким образом, объединяя полученные решения, имеем $x\in(-\infty;-2)\cup\left[-2;5\frac{1}{2}\right]$ или $x\in\left(-\infty;5\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left(-\infty;5\frac{1}{2}\right]$.

3.8. Квадратные уравнения

Квадратным уравнением (уравнением *второй степени* с одним неизвестным) называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$. Числа a и b называются *коэффициентами*, а *c – свободным членом* общего квадратного уравнения.

Напомним, что выражение $D=b^2-4ac$ – *дискриминант* квадратного уравнения.

При $D<0$ квадратное уравнение не имеет действительных корней.

При $D=0$ уравнение имеет два равных действительных корня или единственный действительный корень, кратность которого равна двум.

При $D>0$ уравнение имеет два различных действительных корня, которые находятся по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если в квадратном уравнении коэффициент a равен 1, то есть уравнение можно записать в виде $x^2+px+q=0$, то уравнение называется *приведенным*. Корни приведенного уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Корни приведенного квадратного уравнения можно найти по *теореме Виета*: если x_1 и x_2 – действительные корни приведенного квадратного уравнения, то имеет место система вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами и положительным дискриминантом может иметь либо два целых, либо два иррациональных корня.

При решении квадратного уравнения во избежание арифметических ошибок целесообразно приводить его к стандартной форме, то есть к виду $ax^2 + bx + c = 0$ при $a > 0$.

Пример 13. Решить уравнение $10 + 2\left(1 - 3x^2\right) = 3(x+1)^2 + 3(x-3)$.

Решение. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $-9x^2 - 9x + 18 = 0$. Разделив обе части на (-9), будем иметь $x^2 + x - 2 = 0$. Получено квадратное уравнение, к которому можно применить теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 \cdot x_2 = -2. \end{cases}$$

Легко подобрать целые числа, удовлетворяющие этой системе: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$.

Проверка показывает, что это действительно корни исходного уравнения. Ответ можно записать в виде числового множества корней уравнения, при этом корни записывают в порядке их возрастания: $\{-2;1\}$.

Ответ: $\{-2;1\}$.

Пример 14. Решить уравнение $5x^2 + 7x + 2 = 0$.

Решение. Это общее квадратное уравнение. Найдем его дискриминант. $D = 49 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9 > 0$. Тогда его корни:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 3}{10}.$$

Или $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Квадратные уравнения вида $ax^2 = 0$, $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ называются *неполными*, и нет необходимости для их решения применять приведенные выше формулы корней.

Пример 15. Решить уравнение $5x^2 = 0$.

Решение. Решение очевидно: $x_1 = x_2 = 0$.

Ответ:0.

Пример 16. Решить уравнение $x^2 + 12 = 0$.

Решение. Такое уравнение действительных корней не имеет, так как ни при каком действительном x выражение x^2 не равняется (-12), то есть $x \in \varnothing$.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 17. Решить уравнение $3x^2 - 27x = 0$.

Решение. Вынося 3*x* за скобки, получим $3x(x-9)=0$. Отсюда получим $x_1=0$, $x_2=9$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=9$.

Зная корни квадратного трехчлена, его можно разложить на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Пример 18. Разложить на линейные множители функцию

$$f(x)=x(x+1)+x(x-4)-4(x+3)+2x.$$

Решение. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $f(x)=2x^2-5x-12$. Приравняв квадратный трехчлен к нулю, будем иметь квадратное уравнение:

$$2x^2-5x-12=0.$$

Найдем дискриминант и корни: $D=25-4\cdot 2\cdot(-12)=121$,

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{121}}{4};\ x_1=4,\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

Разложим на множители квадратный трехчлен:

$$2x^2-5x-12=2(x-4)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-4)(2x+3).$$

Таким образом, получим $f(x)=(x-4)(2x+3)$.

Ответ: $f(x)=(x-4)(2x+3)$.

3.9. Квадратные неравенства. Теоремы о знаке квадратичной функции

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ при $a\neq 0$, знак неравенства может быть любым: $<, \geq, \leq$.

Решить неравенство $ax^2+bx+c>0$ – найти значения *x*, при которых функция $y=ax^2+bx+c$ имеет только положительные значения.

Аналогично выясняется смысл решения неравенства $ax^2+bx+c<0$. Решение квадратных неравенств связано с нахождением интервалов *знакопостоянства квадратичной функции*.

Заметим, что интервалы знакопостоянства функции $y=ax^2+bx+c$ легко находятся с помощью ее графика. Приведем аналитическое решение этого вопроса.

Теорема 1. *Если корни квадратичной функции* $y=ax^2+bx+c$ *– действительные и различные числа, то для значений x, принадлежащих интервалу между корнями, знак функции противоположен знаку коэффициента a; для значений x вне этого интервала знак функции совпадает со знаком коэффициента a.*

Для наглядности результаты теоремы запишем в Таблицу 1 и проиллюстрируем (Рис. 15).

Таблица 1

x	$(-\infty;x_1)$	$(x_1;x_2)$	$(x_2;+\infty)$
Знак *y*	Совпадает со знаком *a*	Противоположен знаку *a*	Совпадает со знаком *a*

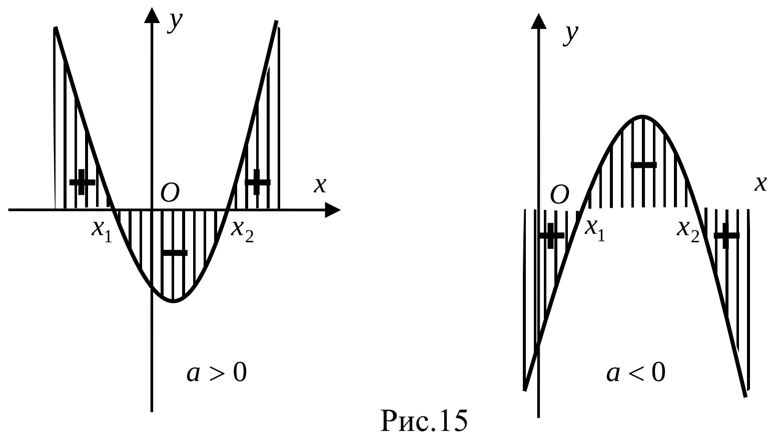


Рис.15

Пример 19. Установить интервалы знакопостоянства функции $y = x^2 - 2x - 15$.

Решение. Найдем корни функции подбором по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 \cdot x_2 = -15. \end{cases}$$

Отсюда получим $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

Так как $a = 1 > 0$, то:

Таблица 2

x	$(-\infty;-3)$	$(-3;5)$	$(5;+\infty)$
Знак y	+	—	+

Теорема 2. *Если корни квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$ *– действительные и равные, то при всех* x*, кроме* $x = \dfrac{-b}{2ac}$*, знак функции совпадает со знаком коэффициента а.*

Пример 20. Установить интервалы знакопостоянства функции $y = -x^2 + 4x - 4$.

Решение. $y = -x^2 + 4x - 4$, $y = -(x-2)^2$, $x_1 = x_2 = 2$, $y < 0$ при всех $x \neq 2$.

Теорема 3. *Если квадратичная функция не имеет действительных корней, то для всех без исключения значений x знак y совпадает со знаком коэффициента a.*

Пример 21. Определить знак функции $y = -x^2 + x - 1$.

Решение. $D = 1 - 4(-1)\cdot(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$, значит, действительных корней функция не имеет, следовательно, по теореме 3 знак функции совпадает со знаком коэффициента $a = -1$, то есть $y < 0$ при всех x.

Замечание. При решении квадратного неравенства необходимо использовать приведенные теоремы (1–3).

Пример 22. Решить неравенство $2x^2 - x - 3 \geq 0$.

Решение. Дискриминант $D = 25$, корни квадратного трехчлена $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$. Тогда множество значений x, удовлетворяющих неравенству, имеет вид: $(-\infty;-1) \cup \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Ответ: $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

3.10. Иррациональные уравнения и неравенства

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком корня (радикала), называются *иррациональными*. Если степень корня чётная, то выражение под знаком корня должно быть неотрицательным.

Иррациональное уравнение решается преобразованием его к рациональному уравнению, что достигается возведением его в необходимую степень.

После возведения уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Однако могут появиться так называемые *посторонние* корни.

Все найденные корни проверяются, посторонние корни отбрасываются.

При возведении в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному.

Пример 23. Решить уравнение $\sqrt{4x^2+2x+7}=4x+1$.

Решение. Данное уравнение решается возведением обеих частей в квадрат, что может привести к появлению посторонних корней, входящих в область допустимых значений переменной (ОДЗ). Посторонние корни отбрасываются проверкой (ОДЗ в этом случае можно не определять). В результате возведения обеих частей в квадрат получим:

$$4x^2+2x+7=16x^2+8x+1.$$

После приведения подобных слагаемых получим уравнение: $12x^2+6x-6=0$ или $2x^2+x-1=0$. Найдем его дискриминант и корни: $D=9, x_1=\frac{1}{2}, x_2=-1$.

Выполним проверку: подставим первый корень $x_1=\frac{1}{2}$ поочередно в левую и правую части уравнения. Левая часть равна

$$\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+7}=\sqrt{9}=3;$$

правая часть равна $4\cdot\frac{1}{2}+1=3$. Так как левая часть равна правой, то $x_1=\frac{1}{2}$ является корнем исходного уравнения. Аналогично проверим второй корень $x_2=-1$. Левая часть равна $\sqrt{4\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+7}=\sqrt{9}=3$, правая часть равна $4\cdot(-1)+1=-3$. Так как $3\neq-3$, то $x_2=-1$– посторонний корень.

Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 24. Решить уравнение $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+5}=1$.

Решение. Преобразуем уравнение $\sqrt{3x+4}=\sqrt{x+5}+1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $3x+4=x+5+2\sqrt{x+5}+1$, $2x-2=2\sqrt{x+5}$ или $x-1=\sqrt{x+5}$.

Еще раз возводим в квадрат обе части уравнения: $x^2-2x+1=x+5$, $x^2-3x-4=0$.

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=3, \\ x_1\cdot x_2=-4. \end{cases}$$

Получим $x_1=-1$, $x_2=4$.

Выполним проверку. Подставим $x_1 = -1$ в исходное уравнение. Левая часть равна $\sqrt{3\cdot(-1)+4} - \sqrt{-1+5} = 1-2 \neq 1$, значит, $x_1 = -1$ не является решением уравнения, то есть это посторонний корень.

Подставим $x_2 = 4$, получим $\sqrt{3\cdot 4+4} - \sqrt{4+5} = 4-3 = 1$, значит, $x_2 = 4$ является решением исходного уравнения.

Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Решение ***иррационального неравенства*** сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем рациональных неравенств.

Эти системы решаются возведением обеих частей неравенства в одну и ту же степень при наложении необходимых ограничений на переменную.

Рассмотрим основные виды иррациональных неравенств (систем неравенств) или совокупности неравенств, которым они равносильны. В неравенствах будем рассматривать корни степени $n = 2k$, то есть четной степени.

1. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) < \varphi^{2k}(x). \end{cases}$$

2. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

3. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) > \varphi(x). \end{cases}$$

Пример 25. Решить неравенство $\sqrt{x^2+3x-4} < x+2$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ x^2+3x-4 < x^2+4x+4. \end{cases}$$

Корни квадратного трехчлена в левой части первого неравенства находим по теореме Виета: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. По теореме 1 о знаке квадратичной функции первое неравенство равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x \leq -4, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

Преобразовав второе и третье неравенства системы, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &x \le -4, \\ &x \ge 1; \end{aligned}\right. \\ x \ge -2, \\ x > -8; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x \le -4, \\ &x \ge 1; \end{aligned}\right. \\ x \ge -2. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x \le -4, \\ x \ge -2; \end{cases} \\ &\begin{cases} x \ge 1, \\ x \ge -2. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Первая система решений не имеет, поэтому данная совокупность неравенств равносильна системе:

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ x \ge -2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x \ge 1$.

Таким образом, решением исходного неравенства является промежуток $[1;+\infty)$.

Ответ: $[1;+\infty)$.

Пример 26. Решить неравенство $\sqrt{2x+14} > x+3$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} 2x+14 \ge 0, \\ x+3 \ge 0, \\ 2x+14 > x^2+6x+9; \end{cases} \\ &\begin{cases} x+3 < 0, \\ 2x+14 \ge 0; \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x \ge -7, \\ x \ge -3, \\ x^2+4x-5 < 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} x < -3, \\ x \ge -7. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Решением третьего неравенства из первой системы по теореме 1 о знаке квадратичной функции будет промежуток, заключенный между корнями квадратного трехчлена: $-4 < x < 1$. Используя двойное неравенство, получим:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x \ge -3, \\ -4 < x < 1; \end{cases} \\ &-7 \le x \le -3; \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &-3 \le x < 1, \\ &-7 \le x < -3. \end{aligned}\right.$$

Объединяя промежутки, получим $-7 \le x < 1$.

Итак, решением неравенства будет промежуток $[-7;1)$.

Ответ: $[-7;1)$.

Замечание. При решении неравенств во избежание громоздкости записей можно не использовать знак совокупности, а решить сначала одну систему, потом вторую, а результаты объединить.

3.11. Степень и ее свойства

Степенью действительного числа a с натуральным показателем n называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a: $a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n$, $a^1 = a$.

Действительное число $a \in R$ называется основанием степени, натуральное число $n \in N$ называется показателем степени.

Если $a \in R$, $a \neq 0$, $n \in N$, то по определению $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Степень 0^0 не определена, однако этот символ используется в теории пределов для обозначения вида неопределенности, например, $\{0^0\}$.

Корнем n-й степени из действительного числа a, где n – натуральное число, $\sqrt[n]{a}$ называется такое число, n-я степень которого равна a. Возможны случаи:

1. Если n – четное число и $a > 0$, тогда существуют два значения $\sqrt[n]{a}$ и $-\sqrt[n]{a}$, которые являются противоположными.

2. Если n – четное число и $a < 0$, то $\sqrt[n]{a}$ не существует в области действительных чисел.

3. Если $a = 0$, то $\sqrt[n]{0} = 0$.

4. Если n – нечетное число, то для любых $a \in R$ выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет одно значение.

Арифметическим корнем n-й степени из числа a $(n \in N, a \in R)$ называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Из этого определения следует, что для арифметического корня четной степени справедливо равенство: $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$. Например, $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, а $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Степенью действительного числа a ($a > 0$) с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m − целое число, а n – натуральное, называется число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Если $a = 0$, то при $r > 0$ имеем $a^r = 0$.

Если $a = 1$, а r – действительное число, то $a^r = 1$. Известно, что для любого $a \in R$, $a > 0$ и $r \in R$ существует единственное число a^r.

Степень числа с действительным показателем обладает при $a > 0$, $b > 0$ следующими свойствами:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$;
3. $(a^r)^s = a^{rs}$;
4. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

3.12. Преобразование и вычисление значений показательных выражений

При преобразовании и вычислении значений показательных выражений следует использовать определение и свойства степени и ряд специальных приемов.

Наибольшие трудности возникают при использовании свойства корня n-й степени для действительных чисел:

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x|, \ n=2k, k\in N;\\ x, \ n=2k-1, k\in N.\end{cases}$$

Умножение дробных выражений, содержащих корни *n*-й степени, на выражение, сопряженное знаменателю, иногда позволяет упростить вид всего выражения.

Корни *n*-й степени в некоторых случаях удобно заменить на соответствующие степени с рациональным показателем, а иногда полезно ввести новую переменную, что позволяет сделать выражение более компактным. При вычислении корня *n*-й степени часто помогает разложение подкоренного выражения на множители.

Пример 28. Вычислить значение выражения $\sqrt[3]{-20\cdot 25\cdot 128}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{-20\cdot 25\cdot 128}=-\sqrt[3]{2^2\cdot 5\cdot 5^2\cdot 2^7}=-\sqrt[3]{2^9\cdot 5^3}=-2^3\cdot 5=-40.$$

Ответ: -40.

Пример 29. Вычислить значение выражения $\sqrt{14^2+42^2+21^2}$.

Решение.

$$\sqrt{14^2+42^2+21^2}=\sqrt{(2\cdot 7)^2+(6\cdot 7)^2+(3\cdot 7)^2}=$$
$$=\sqrt{2^2\cdot 7^2+6^2\cdot 7^2+3^2\cdot 7^2}=\sqrt{7^2(4+36+9)}=7\sqrt{49}=7\cdot 7=49.$$

Ответ: 49.

Пример 30. Вычислить значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^3}}{\sqrt[3]{36-35}}+\sqrt{35}=\frac{6-\sqrt{35}}{1}+\sqrt{35}=6.$$

Ответ: 6.

Пример 31. Найти значение выражения $\sqrt[4]{(2x-1)^4}-\sqrt[4]{(2x+1)^4}$ при $x<-99$.

Решение. Упростим выражение, используя свойства корня и модуля:

$$\sqrt[4]{(2x-1)^4}-\sqrt[4]{(2x+1)^4}=|2x-1|-|2x+1|=-2x+1+2x+1=2.$$

Ответ: 2.

3.13. Показательная функция

Функция, заданная формулой $y=a^x$, где *a>0*, $a\neq 1$ называется *показательной*.

Областью определения показательной функции является все множество действительных чисел *R*, то есть $x\in(-\infty;+\infty)$.

Областью значений показательной функции является множество действительных чисел R_+, то есть $y\in(0;+\infty)$.

Так как *y>0*, то корней показательная функция не имеет и ее график не пересекает ось *Ox*.

Показательная функция не является ни чётной, ни нечётной.

При $a>1$ функция возрастает, а при $0<a<1$ – убывает во всей области определения, то есть при $x \in (-\infty;+\infty)$.

Графиком показательной функции является кривая, проходящая через точку (0;1), представленная на Рис. 16.

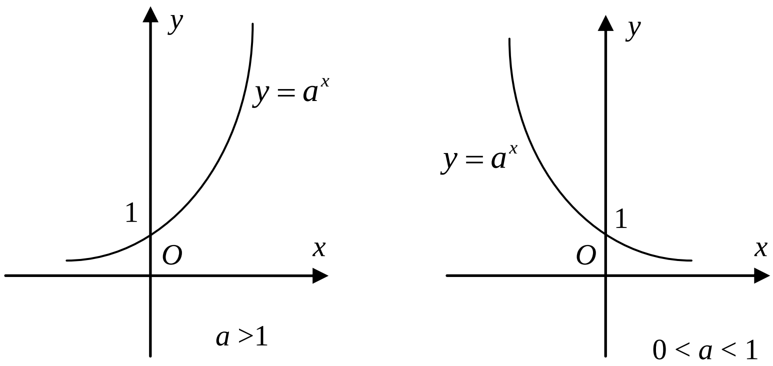


Рис. 16

3.14. Логарифмы и их свойства

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0,\ a \neq 1$) называется показатель степени c, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b: $a^c = b$, где $c = \log_a b$.

Обозначение $\log_a b$ читается «логарифм числа b по основанию a».

Из определения логарифма следует основное *логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Десятичным логарифмом положительного числа b называют логарифм по основанию 10 и обозначают $\lg b$.

Натуральным логарифмом положительного числа b называют логарифм по основанию e и обозначают $\ln b$, где e – трансцендентное число ($e \approx 2{,}71828...$),

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

При $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$ логарифмы обладают следующими свойствами:

1. $\log_a a = 1$;
2. $\log_a 1 = 0$;
3. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;
4. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
5. $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$;
6. $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b$, при $p \neq 1$;
7. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, при $c \neq 1$, $b \neq 1$;
8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула перехода к новому основанию, $c \neq 1$.

Из формулы перехода к новому основанию следует, в частности, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Операция нахождения логарифма числа по заданному основанию называется *логарифмированием*, а операция нахождения числа, логарифм которого по данному основанию задан, называется *потенцированием.*

3.15. Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений используют определение и основные свойства логарифмов.

Пример 32. Вычислить значение выражения $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt[6]{243}}$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком логарифма

$$\frac{1}{\sqrt[6]{243}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^5}} = \frac{1}{3^{\frac{5}{6}}} = 3^{-\frac{5}{6}}.$$

$$\log_3 \frac{1}{\sqrt[6]{243}} = \log_3 3^{-\frac{5}{6}} = -\frac{5}{6}.$$

Ответ: $-\dfrac{5}{6}$.

Пример 33. Найти значение выражения A, если

$$A = 3\log_{15} 3 + 2\log_{15} 5 - \frac{1}{3}\log_{15} 27 - 0{,}5\log_{15} 1.$$

Решение. Преобразуем выражение, используя свойства логарифма:

$$A = \log_{15} 3^3 + \log_{15} 5^2 - \log_{15} 27^{\frac{1}{3}} - 0 =$$

$$= \log_{15} \frac{27 \cdot 25}{3} = \log_{15} 225 = \log_{15} 15^2 = 2$$

Итак, получим $A = 2$.

Ответ:2.

Пример 34. Найти значение выражения A, если

$$A = \left(\frac{\ln 15}{\ln 10} - \frac{\ln 5}{\ln 10}\right)\log_3 10.$$

Решение. Применяя формулу перехода к новому основанию, перейдем в данном выражении к десятичным логарифмам:

$$\lg 15 = \frac{\ln 15}{\ln 10},\ \lg 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10},\ \log_3 10 = \frac{1}{\lg 3}.$$

Тогда получим

$$A = (\lg 15 - \lg 5) \cdot \frac{1}{\lg 3} = \lg 3 \cdot \frac{1}{\lg 3} = 1.$$

Ответ:1.

Пример 35. Вычислим значение выражения A, если

$$A = \log_{\frac{1}{3}} \log_{27} \log_9 729.$$

Решение. Преобразовав «внутренний» логарифм, получим

$$A=\log_{\frac{1}{3}}\log_{27}\log_9 729=\log_{\frac{1}{3}}\log_{27}3=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1.$$

Ответ: 1.

3.16. Логарифмическая функция

Функция, заданная формулой $y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$, называется *логарифмической*.

Областью определения логарифмической функции является множество положительных действительных чисел R_+, то есть $x\in(0;+\infty)$.

Областью значений логарифмический функции является все множество действительных чисел R, то есть $y\in(-\infty;+\infty)$.

Логарифмическая функция имеет один корень $x=1$, так как $\log_a 1=0$. Таким образом, ее график пересекает ось Ox в точке $(0;1)$.

Логарифмическая функция не является ни чётной, ни нечётной.

При $a>1$ функция возрастает, а при $0<a<1$ – убывает во всей области определения, то есть на $(0;+\infty)$.

Графиком логарифмической функции является кривая, проходящая через точку (1;0), представленная на Рис. 17.

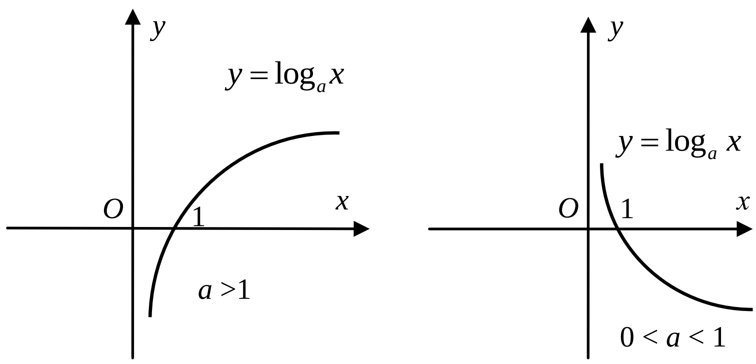


Рис. 17

Следует заметить, что для показательной функции $y=a^x$ логарифмическая функция $y=\log_a x$ является обратной – и наоборот, их графики симметричны относительно прямой $y=x$. Так, например, функции $y=e^x$ и $y=\ln x$ взаимно обратны, их графики, симметричные относительно прямой $y=x$, приведены на Рис. 18.

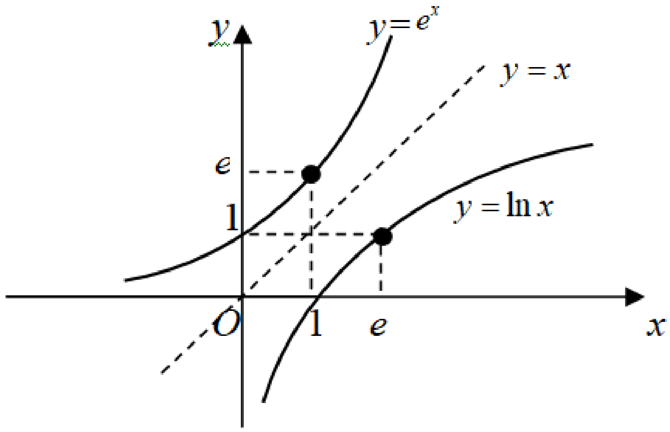


Рис. 18

3.17. Показательные уравнения и неравенства

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным*.

При решении большинства показательных уравнений используется одно из свойств показательной функции – взаимно-однозначное соответствие между показательной функцией и ее аргументом. Из этого свойства следует, что если равны степени с одинаковым основанием, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то либо равны показатели степени $f(x) = g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, либо основание равно единице, то есть $a = 1$.

Некоторые показательные уравнения подстановкой $a^{f(x)} = t$ приводятся к алгебраическим уравнениям. Следует заметить, что по свойству показательной функции новая неизвестная t должна быть положительной, то есть $t > 0$.

Пример 36. Решить уравнение $2^{x^2-7x+12} = 1$.

Решение. Используя свойства степени с нулевым показателем, получим $2^{x^2-7x+12} = 2^0$, $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Решая квадратное уравнение, получим корни $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Ответ запишем в виде множества: $\{3;\ 4\}$.

Ответ: $\{3;\ 4\}$.

Пример 37. Решить уравнение $27^{x-\frac{2}{3}} - 9^{x-1} = 2\cdot 3^{2x-1} - 2\cdot 3^{3x-1}$.

Решение. Преобразуем уравнение, используя свойства степени:

$$27^{x-\frac{2}{3}} + 2\cdot 3^{3x-1} = 2\cdot 3^{2x-1} + 9^{x-1},$$

$$3^{3x-2} + 2\cdot 3^{3x-1} = 2\cdot 3^{2x-1} + 3^{2x-2},$$

$$3^{3x-2} + 2\cdot 3\cdot 3^{3x-2} = 2\cdot 3\cdot 3^{2x-2} + 3^{2x-2},$$

$$3^{3x-2}(1+6) = (1+6)3^{2x-2},$$

$$3^{3x-2}\cdot 7 = 7\cdot 3^{2x-2}.$$

Так как равны основания степени, то равны и показатели: $3x - 2 = 2x - 2$, отсюда получим $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Пример 38. Решить уравнение $2^{3-2x} - 3\cdot 2^{1-x} + 1 = 0$.

Решение. Уравнение решим методом подстановки, выполнив предварительно преобразование левой части уравнения.

$2^{3-2x}-3\cdot 2^{1-x}+1=0$, $2^3-3\cdot 2^{1+x}+2^{2x}=0$, $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$.

Введем новую переменную: $2^x=t$, $t>0$.

Тогда получим квадратное уравнение: $t^2-6t+8=0$. Отсюда получим $t_1=2, t_2=4$.

Рассмотрим первый корень $t_1=2$. Тогда имеем $2^x=2$, $x=1$.

Рассмотрим второй корень $t_2=4$. Тогда имеем $2^x=4$, $x=2$.

Таким образом, исходное показательное уравнение имеет два корня, ответ запишем в виде множества $\{1;\ 2\}$.

Ответ:$\{1;\ 2\}$.

Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным*.

Решение простейших показательных неравенств основано на известном свойстве показательной функции $y=a^x$: функция возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

Например, из неравенства $2^{f(x)}<2^{g(x)}$ следует, что $f(x)<g(x)$, так как основание $a=2$, то есть $a>1$; а из неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}<\left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$ следует, что $f(x)>g(x)$, так как основание $a=\frac{1}{3}$, то есть $0<a<1$.

Пример 39. Решить неравенство $0{,}5^{7-3x}<4$.

Решение. Неравенство $0{,}5^{7-3x}<4$ равносильно неравенству $0{,}5^{7-3x}<0{,}5^{-2}$.

Так как основание $a=0{,}5<1$, то получим $7-3x>-2$, $-3x>-9$, $x<3$, то есть $x\in(-\infty;3)$.

Ответ:$-1\le t\le 6$.

Пример 40. Решить неравенство $6^{x^2+2x}>216$.

Решение. Неравенство $6^{x^2+2x}>216$ равносильно неравенству $6^{x^2+2x}>6^3$, отсюда имеем $x^2+2x>3$, так как основание $a=6>1$. Получим квадратное неравенство $x^2+2x-3>0$. Корни квадратного трехчлена в левой части равны $x_1=-3$ и $x_2=1$. По теореме 1 (п. 3.9) решением квадратного неравенства будет совокупность $\left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>1. \end{array}\right.$

Отсюда получим $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Ответ:$(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Пример 41. Решить неравенство $\left(\frac{1}{36}\right)^x-5\cdot 6^{-x}-6\le 0$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-6\le 0.$$

Введем обозначение $\left(\frac{1}{6}\right)^x=t$, $t>0$, тогда $t^2-5t-6\le 0$.

Корни квадратного трехчлена в левой части равны $t_1=-1$, $t_2=6$. Решением квадратного неравенства по теореме 1 (п. 3.9) будет промежуток $-1 \le t \le 6$, а учитывая, что $t > 0$, получим: $0 < t \le 6$. Возвращаясь к переменной x, имеем $0 < \left(\frac{1}{6}\right)^x \le 6$, $6^{-x} \le 6$, $-x \le 1$, $x \ge -1$, то есть $x \in [-1;+\infty)$

Ответ: $[-1;+\infty)$.

Решение показательных неравенств вида $f(x)^{\varphi_1(x)} < f(x)^{\varphi_2(x)}$ приводит к совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 42. Решить неравенство $(x+3)^{x^2-5x+6} > 1$.

Решение. Запишем неравенство в виде: $(x+3)^{x^2-5x+6} > (x+3)^0$.

Это неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 > 1, \\ x^2-5x+6 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x+3 < 1, \\ x^2-5x+6 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим отдельно каждую систему совокупности неравенств.

1) $\begin{cases} x+3 > 1, \\ x^2-5x+6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2, \\ (x-2)(x-3) > 0. \end{cases}$

Для решения ситемы применим метод интервалов (Рис. 19):

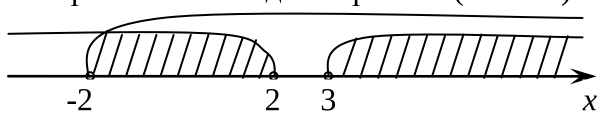


Рис. 19.

Решение этой системы: $x \in (-2;2) \cup (3;+\infty)$.

2) $\begin{cases} 0 < x+3 < 1, \\ x^2-5x+6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < x < -2, \\ (x-2)(x-3) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < x < -2, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$

Полученная система решений не имеет, так как нет таких значений неизвестного, которые удовлетворяли бы обоим неравенствам системы, то есть $x \in \varnothing$.

Таким образом, исходное неравенство имеет решение: $x \in (-2;2) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $(-2;2) \cup (3;+\infty)$.

3.18. Логарифмические уравнения и неравенства

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

При решении логарифмических уравнений необходимо учитывать область определения и свойства логарифма. Так, простейшее логарифмическое уравнение

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при условии:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}.$$

Если нахождение ОДЗ неизвестного представляет собой достаточно сложную задачу, то найденные корни следует проверить подстановкой в исходное уравнение для исключения посторонних корней.

Пример 43. Решить уравнение $\log_3\left(\log^2{}_{0,5} x + 3\log_2 x + 5\right) = 2$.

Решение. Выпишем ОДЗ:

$$\begin{cases} \log^2{}_{0,5} x + 3\log_2 x + 5 > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\log_2 x = -\log_{0,5} x$, имеем:

$$\begin{cases} \log^2{}_{0,5} x - 3\log_{0,5} x + 5 > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Введем новую переменную $t = \log_{0,5} x$. Тогда неравенство $\log^2{}_{0,5} x - 3\log_{0,5} x + 5 > 0$ системы примет вид: $t^2 - 3t + 5 > 0$. Так как $D = -11$, то $t \in R$. Следовательно, $\log_{0,5} x \in R$, а ОДЗ: $x > 0$.

Преобразуем уравнение с учетом определения логарифма:

$$\log^2{}_{0,5} x - 3\log_{0,5} x + 5 = 3^2.$$

Пусть $t = \log_{0,5} x$, тогда получим $t^2 - 3t + 5 = 9$, $t^2 - 3t - 4 = 0$.

Корни этого уравнения: $t_1 = -1$, $t_2 = 4$.

Если $t_1 = -1$, то имеем $\log_{0,5} x = -1$, $x_1 = 0{,}5^{-1} = 2$.

Если $t_2 = 4$, то имеем $\log_{0,5} x = 4$, $x_2 = 0{,}5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Оба корня принадлежат ОДЗ. Ответ запишем в виде множества $\left\{\frac{1}{16}; 2\right\}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{16}; 2\right\}$.

Пример 44. Решить уравнение $\log_x \sqrt{3} - \left(\log_x \sqrt{3}\right)^2 = \log_2 8 - \log_x 3x$.

Решение. Так как неизвестное x является основанием логарифма, то ОДЗ имеет вид:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{2}\log_x 3 - \left(\frac{1}{2}\log_x 3\right)^2 = 3 - \left(\log_x 3 + \log_x x\right).$$

Пусть $t = \log_x 3$, тогда получим уравнение: $\frac{1}{2}t - \left(\frac{1}{2}t\right)^2 = 3 - (t+1)$, $-\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t - 2 = 0$, $t^2 - 6t + 8 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 4$.

Если $t_1 = 2$, то имеем $\log_x 3 = 2$, $x^2 = 3$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

Если $t_2 = 4$, то имеем $\log_x 3 = 4$, $x^4 = 3$, $x_{3,4} = \pm\sqrt[4]{3}$.

Корни $x_2 = -\sqrt{3}$ и $x_4 = -\sqrt[4]{3}$ не входят в ОДЗ, поэтому $x_1 = \sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt[4]{3}$ – корни уравнения. Ответ запишем в виде множества $\{\sqrt[4]{3}; \sqrt{3}\}$.

Ответ: $\{\sqrt[4]{3}; \sqrt{3}\}$.

Одним из способов решения показательно-степенных уравнений является логарифмирование обеих частей уравнения, то есть уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, при $a > 0$, $a \neq 1$ и $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Пример 45. Решить уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x - 1} = 5$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. При этом обе части уравнения положительны. Так как в уравнении присутствует логарифм по основанию 5, то прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5:

$$\log_5 \left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x - 1} = \log_5 5, \ (\log_5 x - 1) \cdot \frac{1}{2} \log_5 x = 1.$$

Пусть $t = \log_5 x$, получим уравнение: $(t-1) \cdot \frac{1}{2} t = 1$, $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Если $t_1 = -1$, то имеем $\log_5 x = -1$, $x_1 = 5^{-1} = 0{,}2$.

Если $t_2 = 2$, то имеем $\log_5 x = 2$, $x_2 = 5^2 = 25$.

Оба корня входят в ОДЗ. Ответ запишем в виде множества $\{0{,}2; 25\}$.

Ответ: $\{0{,}2; 25\}$.

Неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называются *логарифмическими*.

При решении логарифмических неравенств необходимо учитывать область определения и свойства возрастания и убывания логарифмической функции $y = \log_a x$: ООФ задается условием $x > 0$, функция возрастает при $a > 1$, функция убывает при $0 < a < 1$.

Таким образом, неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ с учетом ОДЗ равносильно, учитывая ОДЗ, системе неравенств:

при $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

при $0 < a < 1$:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 46. Решить неравенство $\log_{0,1}(5 - x) \geq -2$.

Решение. Учитывая, что $\log_{0,1} 0{,}1^{-2} = -2$, запишем неравенство в виде

$$\log_{0,1}(5-x) \ge \log_{0,1}100.$$

Так как $a = 0,1 < 1$, то неравенство равносильно системе неравенств:

$\begin{cases} 5-x \le 100, \\ 5-x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -95, \\ x < 5; \end{cases}$ $-95 \le x < 5$, то есть имеем $x \in [-95;5)$.

Ответ: $[-95;5)$.

Если исходное неравенство содержит сумму или разность нескольких логарифмов, то при переходе к равносильной системе следует учитывать область определения каждого логарифма.

Неравенства, содержащие неизвестное x как под знаком логарифма, так и в основании логарифма, то есть неравенства вида $\log_{f(x)} \varphi_1(x) > \log_{f(x)} \varphi_2(x)$, с учетом ОДЗ равносильны совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x), \\ \varphi_2(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x), \\ \varphi_1(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 47. Решить неравенство $2 + \log_2(x+1) > 1 - \log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2)$.

Решение. Используя свойства логарифма, преобразуем неравенство:

$2 + \log_2(x+1) > 1 - \log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2)$,

$1 + \log_2(x+1) > \log_2(4 - x^2)$,

$\log_2 2 + \log_2(x+1) > \log_2(4 - x^2)$,

$\log_2(2(x+1)) > \log_2(4 - x^2)$.

Так как $a = 2 > 1$, то неравенство, учитывая ОДЗ, равносильно системе неравенств:

$\begin{cases} 2x + 2 > 4 - x^2, \\ x + 1 > 0, \\ 4 - x^2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2x - 2 > 0, \\ x > -1, \\ (x-2)(x+2) < 0; \end{cases}$

Так как $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ корни уравнения $x^2 + 2x - 2 = 0$, то система примет вид:

$$\begin{cases} \left(x - \left(-1 - \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(-1 + \sqrt{3}\right)\right) > 0, \\ x > -1, \\ (x-2)(x+2) < 0. \end{cases}$$

Решая систему методом интервалов (Рис. 20), получим $x \in \left(-1 + \sqrt{3};2\right)$.

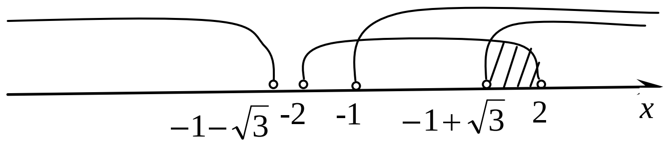


Рис. 20.

Ответ: $\left(-1 + \sqrt{3};2\right)$.

Пример 48. Решить неравенство $\log_{x-1} x^2 > \log_{x-1}(2x-1)$.

Решение. Это неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-1>1, \\ x^2>2x-1, \\ 2x-1>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-1<1, \\ x^2<2x-1, \\ x^2>0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Решим каждую систему совокупности отдельно.

1) $\begin{cases} x-1>1, \\ x^2>2x-1, \\ 2x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ x^2-2x+1>0, \\ x>\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ (x-1)^2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ x\neq 1; \end{cases}$ $x>2$, то есть $x\in(2;+\infty)$.

2) $\begin{cases} 0<x-1<1, \\ x^2<2x-1, \\ x^2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1<x<2, \\ x\neq 1, \end{cases}$ то есть система не имеет решений.

Таким образом, решение исходного логарифмического неравенства: $x\in(2;+\infty)$.

Ответ: $(2;+\infty)$.

3.19. Сведение показательного или логарифмического неравенства к системе рациональных неравенств

Ранее был рассмотрен стандартный метод решения показательных и логарифмических неравенств вида $f(x)^{\varphi_1(x)} < f(x)^{\varphi_2(x)}$ и $\log_{f(x)} \varphi_1(x) > \log_{f(x)} \varphi_2(x)$, предполагающий рассмотрение двух случаев в области допустимых значений неравенств. Однако решение неравенств такого вида можно упростить.

Теорема 1. Показательное неравенство

$$f(x)^{\varphi_1(x)} < f(x)^{\varphi_2(x)}$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ (f(x)-1)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\geq 0. \end{cases}$$

Теорема 2. Логарифмическое неравенство

$$\log_{f(x)} \varphi_1(x) > \log_{f(x)} \varphi_2(x)$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ \varphi_1(x)>0, \\ \varphi_2(x)>0, \\ (f(x)-1)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\geq 0. \end{cases}$$

Пример 49. Решить неравенство $(x^2-x-2)^{(2x^2-x-1)} \ge (x^2-x-2)^{(9-x^2)}$.

Решение. Составим систему неравенств, используя теорему 1:

$$\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x^2-x-2 \ne 1, \\ \big((x^2-x-2)-1\big)\big((2x^2-x-1)-(9-x^2)\big) \ge 0. \end{cases}$$

Решив два первых неравенства, найдем ОДЗ исходного показательного неравенства:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>2; \end{array}\right. \\ x \ne \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Отсюда имеем ОДЗ: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup \left(2; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

Рассмотрим основное неравенство $\big((x^2-x-2)-1\big)\big((2x^2-x-1)-(9-x^2)\big) \ge 0$, которое сводится к виду: $(x^2-x-3)(3x^2-x-10) \ge 0$.

Корни первого множителя этого неравенства: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Корни второго множителя: $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{121}}{6}$, $x_3 = -\dfrac{5}{3}$, $x_4 = 2$.

С учетом значений корней: $3 < \sqrt{13} < 4$, то имеем $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$. Применив метод интервалов, получим решение основного неравенства:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 2\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right).$$

Учитывая ОДЗ, получим: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

Ответ $\left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

Пример 50. Решить неравенство $\log_{x-2}(x^2-1) > \log_{x-2}(2x^2+x-3)$.

Решение. Составим систему неравенств (теорема 2):

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2 \ne 1, \\ x^2-1>0, \\ 2x^2+x-3>0, \\ \big((x-2)-1\big)\big((x^2-1)-(2x^2+x-3)\big) > 0. \end{cases}$$

Решая первые четыре неравенства, практически находим ОДЗ исходного неравенства:

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{3}{2}, \\ x > 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда имеем $x \in (2;3) \cup (3; +\infty)$.

Решим пятое неравенство системы: $((x-2)-1)((x^2-1)-(2x^2+x-3)) > 0$.

После элементарных преобразований получим:

$$(x-3)(x^2+x-2) < 0,$$

$$(x-3)(x-1)(x+2) < 0.$$

Это неравенство решим методом интервалов: $x \in (-\infty;-2) \cup (1; 3)$.

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (2; 3)$.

Ответ: $(2; 3)$.

3.20. Тригонометрия

3.20.1. Радианное измерение углов и дуг

В тригонометрии угол рассматривается как мера вращения одной стороны OA, (Рис. 21) вокруг вершины угла O, переходящей в положение другой стороны OB. Начальную сторону OA можно перевести в положение другой стороны OB вращением вокруг вершины O в направлении обратному направлению движения часовой стрелки (положительном); и в направлении, совпадающем с направлением движения часовой стрелки (отрицательном). При этом могут быть сделаны один или несколько оборотов. Поэтому задание начальной стороны угла и конечной стороны угла неоднозначно определяет угол или определяет с точностью до кратных 360^0.

Центральный угол – это угол, образованный двумя радиусами (угол $\angle AOB$ на Рис. 21).

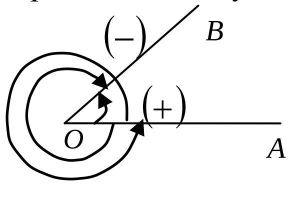


Рис. 21

В тригонометрии, кроме градусного измерения углов, применяется также радианное измерение:

$$1\, радиан = \frac{180^{\circ}}{\pi} = 57^{o}17'44{,}8'' \ldots,$$

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}}\, \text{рад.} = 0{,}01745....\, \text{рад.}$$

Для перехода от радианной меры угла к градусной, необходимо число радианов, содержащихся в угле, умножить на $\dfrac{180^{\circ}}{\pi}$.

Для перехода от градусной меры угла к радианной, необходимо число градусов, содержащихся в угле, умножить на $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Пример 51. Найти градусную меру угла, содержащего 1,5 рад.

Решение. $1{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 1{,}5 \cdot 57^\circ 17' 44{,}8'' = 85^\circ 56' 37{,}2''$.

Ответ: $85^\circ 56' 37{,}2''$.

Пример 52. Найти радианную меру угла, содержащего 17^0.

Решение. $17 \frac{\pi}{180^\circ} = 17 \cdot 0{,}01745 = 0{,}29665$ рад.

Ответ: 0,29665 рад.

Длина дуги окружности определяется по формуле $l = \frac{\pi r n}{180^\circ}$, где n − значение центрального угла в градусах.

3.20.2. Определение тригонометрических функций

Рассмотрим окружность радиуса r (Рис. 22). *Радиусом-вектором* точки M относительно начала координат называется вектор $\overrightarrow{OM}$ соединяющий начало координат O с точкой $M(x, y)$ длина равна $\left|\overrightarrow{OM}\right| = r$.

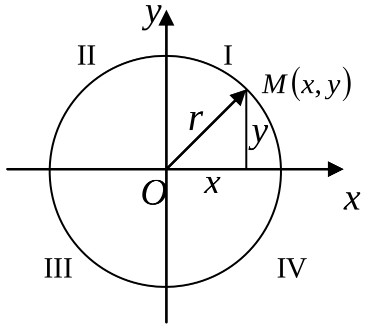


Рис. 22

Синус угла α есть отношение ординаты конца радиуса r, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса, то есть

$$\sin\alpha = \frac{y}{r};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}.$$

Аналогично $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\sec\alpha = \frac{r}{x}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$.

Оси координат делят плоскость (Рис. 22) на четыре квадрата.

Таблица знаков тригонометрических функций (Таблица 3).

Таблица 3

квадранты / функции	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	—	—
$\cos\alpha$	+	—	—	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	—	+	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	—	+	—

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по абсолютной величине не больше единицы, то есть $|\sin\alpha| \le 1$; $|\cos\alpha| \le 1$; $-\infty < \mathrm{tg}\alpha < \infty$; $-\infty < \mathrm{ctg}\alpha < \infty$.

Значения тригонометрических функций некоторых углов (Таблица 4).

Таблица 4

α / Функции	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0	не сущ.
$\sec\alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	не сущ.	-1	не сущ.	1
$\mathrm{cosec}\alpha$	не сущ.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	не сущ.	-1	не сущ.

3.20.3. Периодичность тригонометрических функций. Формулы приведения

Тригонометрические функции – периодические функции. Тангенс и котангенс имеют период равный $\pi\,(180^0)$, остальные тригонометрические функции имеют период 2π (360^0).

Таким образом:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,$$
$$\cos(x+2\pi)=\cos x,$$
$$\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\ x,$$
$$\mathrm{ctg}(x+\pi)=\mathrm{ctg}\ x.$$

Формулы приведения (Таблица 5)

Таблица 5

Функция	Аргумент φ $\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\varphi$	cosα	Cosα	sinα	-sinα	-cosα	cosα	-sinα
$\cos\varphi$	sinα	-sinα	-cosα	-cosα	-sinα	sinα	cosα
$\mathrm{tg}\,\varphi$	ctgα	-ctgα	-tgα	tgα	Ctgα	-tgα	-tgα
$\mathrm{ctg}\,\varphi$	tgα	-tgα	-ctgα	ctgα	Tgα	-tgα	-ctgα

Функция, не меняющая своего значения от изменения знака у аргумента, называется *чётной*. Если же такое изменение знака у аргумента влечёт лишь изменение знака значения функции, то она называется *нечётной*.

Пример 53. Упростить $\sin 1135^\circ$ и $\mathrm{tg}\left(-\frac{33}{5}\pi\right)$.

Решение.
$\sin 1135^\circ = \sin(3\cdot 360^\circ + 55^\circ) = \sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ$;
$\mathrm{tg}\left(-\frac{33}{5}\pi\right) = -\mathrm{tg}\frac{33}{5}\pi = -\mathrm{tg}\left(6\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = -\mathrm{tg}\frac{3\pi}{5} = -\mathrm{tg}\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}$.
Другой способ.
$\mathrm{tg}\left(-\frac{33}{5}\pi\right) = \mathrm{tg}\left(-7\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}$.

Ответ: $\cos 35^\circ$ и $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}$.

3.20.4. Вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них

3.20.4.1 Основные соотношения

Следующие пять формул принято называть *основными*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ (основное тригонометрическое тождество)},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Каждая из написанных формул справедлива при любом значении α, за исключением значения, при котором хотя бы одна часть соответствующего равенства теряет смысл. Так, например, первая формула верна при всяком α, а вторая справедлива лишь при $\alpha \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, где $k \in Z$.

Из основных формул легко выводятся следующие формулы:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha},$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \mathrm{cosec}^2\alpha.$$

Каждая из этих формул также справедлива при всех тех значениях, при которых обе части ее имеют смысл.

3.20.4.2. Значения одних тригонометрических функций, выраженных через значения других

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} = \frac{1}{\mathrm{cosec}\alpha};$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha - 1}}{\mathrm{cosec}\alpha};$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{1}{ctg\alpha}=\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha-1}};$$

$$ctg\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1+\cos^2\alpha}}=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}=\pm\sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha-1};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\cos\alpha}=\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}=\frac{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}{ctg\alpha}=\frac{\mathrm{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha-1}};$$

$$\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\alpha}=\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}=\frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}.$$

3.20.5. Формулы сложения и их следствия

3.20.5.1 Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta};$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta};$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta};$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}.$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Пример 54. Упростить выражение

$$\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Решение. Применим формулу произведения $\sin\alpha\cdot\cos\beta$.

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(15^o+\frac{\alpha}{2}-15^o+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(15^o+\frac{\alpha}{2}+15^o-\frac{\alpha}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\alpha+\sin 30^o\right)-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 30^o=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Замечание. Нередко при выводе приведенных здесь формул рассматривают лишь случай острых положительных углов α и β, причем таких, что $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. На самом деле эти формулы верны при любых значениях α и β, исключая те из них, при которых левая часть какой-нибудь формулы теряет смысл.

3.20.5.2. Формулы кратных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}; \qquad \mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\,3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}.$$

3.20.5.3. Формулы половинных углов

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Знаки перед корнями нужно брать в зависимости от того, в каком квадрате лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

3.20.5.4. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

3.20.5.5 Формулы суммы тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Пример 55. Вычислить без таблиц $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$, используя приведенные ранее формулы.

Решение.

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=$$
$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2+\left(\sin^2\frac{3\pi}{16}\right)^2+\left(\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)^2+\left(\sin^4\frac{7\pi}{16}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(1-\cos\frac{5\pi}{8}\right)^2+\left(1-\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[4-2\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[4-2\left(2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(4+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[4+\frac{1}{2}\left(4+2\cos\pi\cos\frac{3\pi}{4}+2\cos\pi\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[6+\cos\pi\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}.$$

В решении использовано то, что $\cos\frac{\pi}{2}=0.$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

3.20.6. Графики тригонометрических функций

Приведем графики тригонометрических функций с учетом *периодичности*. Как уже указывалось, функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ имеют период 2π, а $y=tgx$ и $y=ctgx$ – период π.

Пределы изменения функций: $y=\sin x$ и $y=\cos x$ от -1 до +1; $y=tgx$ и $y=ctgx$ от $-\infty$ до $+\infty$. Графики этих функций изображены на Рис. 23.

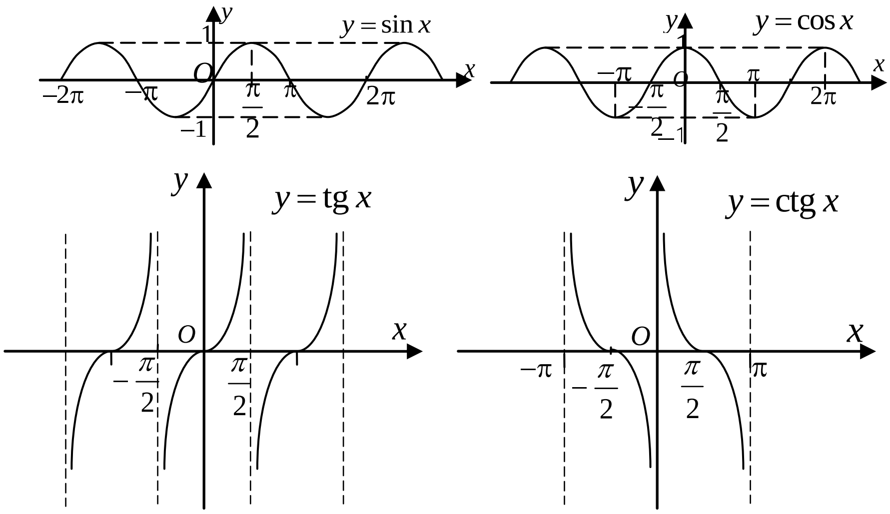


Рис. 23

3.20.7. Обратные тригонометрические функции

Функция обратная $\sin x$ называется *арксинусом* и обозначается: $y = \arcsin\ x$

Выражения $y = \arcsin\ x$ и $x = \sin y$ равносильны, и поэтому можно сказать, что арксинус x есть угол, синус которого равен x.

Функция $y = \arcsin\ x$, $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\ x \le \frac{\pi}{2}$, определена для x, где $-1 \le x \le 1$, однозначная, нечётная, то есть $\arcsin(-x) = -\arcsin\ x$.

Аналогично, $y = \arccos x$, где $0 \le \arccos x \le \pi$, $-1 \le x \le 1$.

$y = \mathrm{arctg}\ x$, где $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\ x < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < \infty$.

$y = \mathrm{arcctg}\ x$, где $0 < \mathrm{arcctg}\ x < \pi$, $-\infty < x < \infty$.

Графики обратных тригонометрических функций изображены на Рис. 24.

Отметим некоторые свойства обратных тригонометрических функций:

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin\ x$, при $|x| \le 1$;
2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, при $|x| \le 1$;
3. $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\ x$;
4. $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}(x)$;
5. $\arcsin\ x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$;
6. $\mathrm{arctg}\ x + \mathrm{arcctg}\ x = \frac{\pi}{2}$.

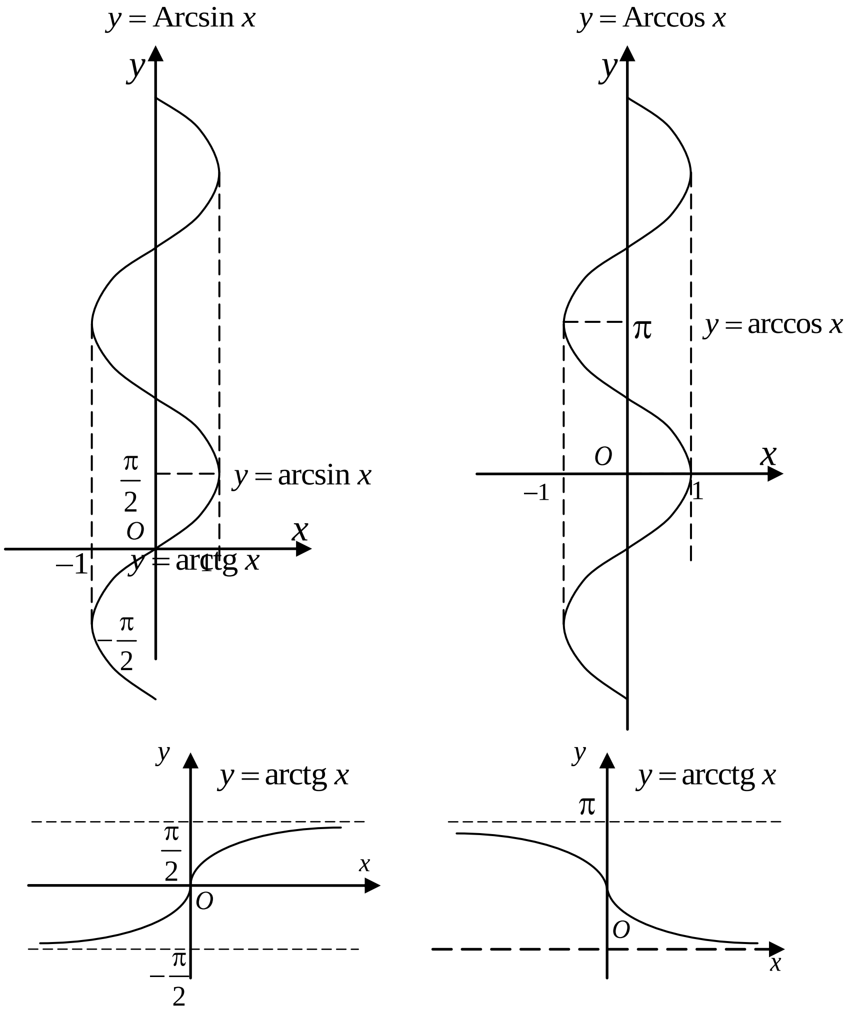


Рис. 24

3.20.8. Тригонометрические уравнения и неравенства

Уравнение и неравенство называется *тригонометрическим*, если неизвестная величина находится под знаком тригонометрической функции.

Рассмотрим основные виды тригонометрических уравнений и неравенств.

3.20.8.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Это уравнения вида

$\sin x = m, \quad \cos x = m, \quad \mathrm{tg} x = m, \quad \mathrm{ctg} x = m,$ где m - число.

Рассмотрим уравнение вида

$$\sin x = m.$$

Так как $|\sin x| \le 1$, то это уравнение при $m > 1$ и $m < -1$ решений не имеет.

Для $|m| < 1$ уравнение имеет решение

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \ n \in Z.$$

Уравнение имеет частные случаи:

$$\sin x = 0, \qquad x = \pi n, \qquad n \in Z.$$

$$\sin x = 1, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z,$$

$$\sin x = -1, \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in Z .$$

Рассмотрим уравнение вида

$$\cos x = m .$$

Так как $|\cos x| \le 1$, то это уравнение при $m > 1$ и $m < -1$ решений не имеет.

Для $|m| < 1$ уравнение имеет решение

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \; n \in Z .$$

Уравнение имеет частные случаи:

$$\cos x = 1, \qquad x = 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

$$\cos x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\cos x = -1, \qquad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z .$$

Рассмотрим уравнение вида

$$\operatorname{tg} x = m .$$

Решение этого уравнения

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi n, \; n \in Z ,$$

Частный случай: если $\operatorname{tg} x = 0$, то $x = \pi n, \quad n \in Z.$

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{ctg} x = m .$$

Решение этого уравнения

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \; n \in Z ,$$

Частный случай: если $\operatorname{ctg} x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

Пример 56. Решить уравнение $\sin 6x = \frac{1}{2}$.

Решение. $6x = \pi n + (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi n}{6} + \frac{(-1)^n \pi}{36}$, $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi n}{6} + \frac{(-1)^n \pi}{36}$, $n \in Z$.

Пример 57. Решить уравнение $tg3x = -1$.

Решение. $3x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n$, $n \in Z$.

Так как $\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

3.20.8.2. Однородные уравнения первой степени относительно sinx, cosx

Однородными уравнениями относительно $\sin x$, $\cos x$ называются уравнения вида ($a \ne 0, b \ne 0$):

$$a \sin x + b \cos x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos x$ (при $\cos x \ne 0$) и получим

$$a \operatorname{tg} x + b = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a},$$

$$x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n,\ \ n \in Z\ .$$

Пример 58. Решить уравнение $2\sin x + 3\cos x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\cos x$ ($\cos x \neq 0$), получим:

$$2\operatorname{tg}x + 3 = 0, \qquad \operatorname{tg}x = -\frac{3}{2}, \qquad x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

3.20.8.3. Однородные уравнения второй степени относительно sin x, cos x

Это уравнения вида:

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = 0\ .$$

В общем случае, если $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, то обе части уравнения делят на $\cos^2 x$ и производят замену $t = \operatorname{tg} x$. Потери корней при делении на $\cos^2 x$ не происходит, так как если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству.

Пример 59. Решить уравнение $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ и сделав замену переменной $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$t^2 - \sqrt{3}t - 6 = 0, \qquad t_1 = -\sqrt{3};\ t_2 = 2\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}, \quad x = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right) + \pi n, \ \ n \in Z.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right) + \pi n,\ \ n \in Z$.

3.20.8.4. Примеры на различные типы тригонометрических уравнений и неравенств

Пример 60. Решить уравнение $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$.

Решение. Введём замену $y = \sin x$, тогда получим квадратное уравнение

$y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_1 = 1;\ y_2 = 2$ - не подходит, так как $|\sin x| \leq 1$.

$$\sin x = 1;\ \ x = 2\pi n + \frac{\pi}{2} = \frac{4n+1}{2}\pi,\ \ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{4n+1}{2}\pi,\ \ n \in .Z$

Пример 61. Решить уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Это уравнение однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Разделив все члены уравнения на $\cos^2 x$ $\left(\cos x \neq 0\right)$, получим:

$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg}x + 1 = 0, \quad \operatorname{tg}x_1 = 1, \quad \operatorname{tg}x_2 = \frac{1}{2};$$

$$x_1 = \pi n + \frac{\pi}{n};\ \ x_2 = \pi n + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $\pi n + \frac{\pi}{n};\ \pi n + \operatorname{arctg}\frac{1}{2},\ \ n \in Z.$

Пример 62. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$.
Решение. Используя формулы приведения, получим

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad 3x = \pi n + \frac{\pi}{2} - x,$$

$$4x = \frac{2n+1}{2}\pi, \qquad x = \frac{2n+1}{8}\pi, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{2n+1}{8}\pi, \quad n \in Z.$

Пример 63. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

Решение. Выразим $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2$, при этом $\operatorname{tg} x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n$.

Получим $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Введём замену $y = \operatorname{tg} x$.

$$y^2 - 2y + 1 = 0, \; y_{1,2} = 1.$$

Отсюда получим: $\operatorname{tg} x = 1, \; x = \pi n + \frac{\pi}{4}, \; n \in Z$.

Ответ: $\pi n + \frac{\pi}{4}, \; n \in Z$.

Пример 64. Решить уравнение $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

Решение. Применим формулу

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right],$$

тогда имеем $\sin \alpha \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$.

Перейдём к уравнению $\cos 2x - \cos 4x = 1$.

$$\cos 2x - (1 + \cos 4x) = 0, \; \cos 2x - 2\cos^2 2x = 0, \; \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Отсюда получим: $\cos 2x_1 = 0, \; 2x_1 = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}, \; x_1 = \pi n \pm \frac{\pi}{4}, \; n \in Z,$

$$\cos 2x_2 = \frac{1}{2}, \; 2x_2 = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}, \; x_2 = \pi n \pm \frac{\pi}{6}, \; n \in Z.$$

Ответ: $\pi n \pm \frac{\pi}{4}; \pi n \pm \frac{\pi}{6}, n \in Z$.

Пример 65. Решить уравнение $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$.
Решение. Применим формулу

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right],$$

тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) = \cos 3x, \; \cos x - \cos 3x = 0.$$

Применяя формулу разности косинусов,

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2},$$

получим $2\sin 2x \cdot \sin x = 0$.
Отсюда имеем

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0, \quad x_1=\dfrac{\pi n}{2}, \quad n\in Z,\\ \sin x=0, \quad x_2=\pi n, \quad n\in Z.\end{array}\right.$$

Решение $x=\pi n$ содержится в решениях $x=\dfrac{\pi n}{2}$ при $n=2k$.

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Пример 66. Решить уравнение $\sin 6x=\sin 4x$.
Решение. Используем формулу:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

тогда имеем $\sin 6x-\sin 4x=2\sin x\cos 5x$, $2\sin x\cos 5x=0$.
Отсюда получим:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0, \quad x_1=\pi n, \quad n\in z,\\ \cos 5x=0, \quad x_2=\dfrac{\pi}{10}(2n+1), \quad n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n;\ \dfrac{\pi}{10}(2n+1)$, $n\in Z$.

3.20.8.5. Тригонометрические неравенства

Наиболее распространённый способ решения тригонометрических неравенств – графический.

Пример 67. Решить неравенство $\cos x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Построим график функции $y=\cos x$ и проведём прямую $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

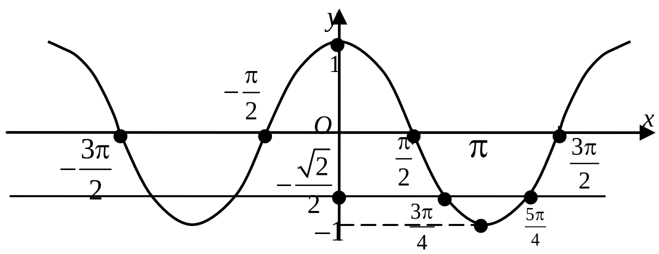


Рис. 25

Прямая $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает график функции $y=\cos x$ в бесконечном числе точек. На Рис. 25 выделен промежуток $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Общий ответ запишем в виде $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Ответ: $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Пример 68. Доказать неравенство $\cos\alpha+\alpha\sin\alpha>1$, если $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Решение. Из неравенства $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ следует, что $\alpha>\sin\alpha$, поэтому $\alpha\sin\alpha>\sin^2\alpha$.

Легко заметить, что $\cos\alpha>\cos^2\alpha$.
Сложив почленно два последние неравенства, получим $\cos\alpha+\alpha\sin\alpha>1$.

Что требовалось доказать.

Пример 69. Найдите множество значений x, удовлетворяющих неравенству $2\sin x+1>0$, если $0\le x\le 2\pi$.

Решение. Рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases}\sin x>-\frac{1}{2},\\ 0\le x\le 2\pi.\end{cases}$$

Системе удовлетворяют следующие значения аргумента $0\le x\le\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: $0\le x\le\frac{7\pi}{6}$.

3.21. Текстовые задачи

3.21.1. Задачи на движение

Все задачи на прямолинейное равномерное движение материальной точки (тела) опираются на закон $S=vt$, где S – пройденное объектом расстояние; v – скорость движения; t – затраченное время.

В задачах «на движение» полезно составить иллюстративный рисунок, на котором была бы отображена динамика движения со всеми характерными моментами: встречами, остановками и поворотами. В задачах «на движение» часто встречаются две ситуации:

1. Движение навстречу друг другу; если первоначальное расстояние между точками, движущимися навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 равно S_0, то время, через которое они встретятся, равно

$$t=\frac{S_0}{v_1+v_2}.$$

2. Движение в одном направлении; если первоначальное расстояние между точками, из которых одна догоняет другую, равно S_0, то время, через которое вторая точка (скорость v_2) догонит первую (скорость v_1), равно

$$t=\frac{S_0}{v_2-v_1},\ \ v_2>v_1.$$

Рассмотрим методику составления уравнений по тексту задачи.

Пример 70. Из пунктов A и C навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пешеход продолжал свой путь в пункт C, а велосипедист повернул назад и тоже поехал в пункт C. Пешеход, вышедший из пункта A, пришел в пункт C на 2 ч позже велосипедиста. Сколько времени шел пешеход до встречи, если известно, что скорость пешехода в 4 раза меньше скорости велосипедиста?

Решение. Обозначим время в пути до встречи x (ч). От места встречи до пункта C пешеход и велосипедист проделали один и тот же путь. Велосипедист проехал его за x (ч), пешеход прошел за $(x + 2)$(ч). При равном пути отрезки времени, затраченные на его преодоление, обратно пропорциональны скоростям. Поэтому, чтобы найти x, составим уравнение

$$\frac{x}{x+2}=\frac{1}{4},\quad \frac{x+2}{x}=4,\quad x=\frac{2}{3}\text{ ч.}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$ ч.

Пример 71. Поезд вышел со станции А по направлению к станции В. Пройдя 450 км, что составило 75 % пути АВ, поезд остановился из-за снежного заноса. Через полчаса поезд тронулся. Скорость поезда пришлось увеличить на 15 км/ч, чтобы прибыть на станцию В по графику. Найти начальную скорость поезда.

Решение. По условию задачи 75 % всего пути S составляют 450 км, поэтому весь путь S = 450:0,75 = 600 км. Обозначим x первоначальную скорость поезда (км/ч); x + 15 – скорость поезда после задержки (км/ч); 600/x – время, которое поезд должен затратить на поездку (ч); 450/x – время, которое поезд двигался до задержки (ч); 150/(x + 15) – время, которое поезд затратил на вторую часть пути (ч).

Очевидно, что справедливо уравнение:

$$\frac{600}{x}=\frac{450}{x}+\frac{150}{x+15}+\frac{1}{2},\quad \frac{300x+x^2+1{,}5x-300x-300\cdot 15}{2x(x+15)}=0;$$

$$x^2+15x-300\cdot 15=0.$$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{15^2+4\cdot 300\cdot 15}}{2}=\frac{-15\pm\sqrt{15^2+4\cdot 15^2\cdot 20}}{2}=$$

$$=\frac{-15\pm\sqrt{15^2(1+4\cdot 20)}}{2}=\frac{-15\pm 15\sqrt{81}}{2}=\frac{-15(-1\pm 9)}{2};$$

$$x_1=-75;\ x_2=60.$$

По условию задачи x = –75 км/ч – посторонний корень, а искомая скорость поезда x = 60 км/ч.

Ответ: 60 км/ч.

3.21.2. Задачи на растворы, смеси и сплавы

В условиях задач с использованием понятий «концентрация» и «процентное содержание» речь идет о составлении сплавов, растворов или смесей двух или нескольких частей.

Основные допущения, принимаемые в задачах подобного рода, состоят в следующем:

1. Все получающиеся сплавы или смеси однородны;

2. При слиянии двух растворов, имеющих объемы V_1 и V_2, получается смесь, объем которой равен

$$V=V_1+V_2.$$

Рассмотрим смесь трех компонент A, B и C. Объем смеси V складывается из объемов чистых компонент:

$$V=V_A+V_B+V_C,$$

а отношения $\frac{V_A}{V},\frac{V_B}{V},\frac{V_C}{V}$ показывают, какую долю полного объема смеси составляют объемы отдельных компонент.

Пример 72. Имеются трех - и восьмипроцентные растворы некоторого вещества. Сколько литров каждого раствора нужно влить для приготовления m литров пятипроцентного раствора этого вещества?

Решение. Обозначим V_1 и V_2 – объемы первого и второго растворов. Тогда $V_1+V_2=V$, где V – заданный объем смеси. Каждый раствор содержит соответственно $0{,}03V_1$ и

$0{,}08V_2$ чистого вещества. Смешанный раствор должен содержать $0{,}05V$ чистого вещества. Составим уравнение $0{,}03V_1 + 0{,}08V_2 = 0{,}05V$. Таким образом, получили систему уравнений вида

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V, \\ \dfrac{3}{100}V_1 + \dfrac{8}{100}V_2 = \dfrac{5}{100}V; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{V_1}{V} + \dfrac{V_2}{V} = 1, \\ 3\dfrac{V_1}{V} + 8\dfrac{V_2}{V} = 5. \end{cases}$$

Решим систему с помощью введения новых переменных $t = V_1/V$ и $p = = V_2/V$. В новых обозначениях получим

$$\begin{cases} t + p = 1, \\ 3t + 8p = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 - p; \\ 3(1-p) + 8p = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $t = 3/5$ и $p = 2/5$. Искомые величины определяются из соотношений $V_1 = \dfrac{3}{5}V$; $V_2 = \dfrac{2}{5}V$, где V – заданная величина. Отсюда следует, что $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{2}$, то есть $V_1 = \dfrac{3}{2}V_2$.

Ответ: $V_1 = \dfrac{3}{5}V$ л; $V_2 = \dfrac{2}{5}V$ л.

3.21.3. Задачи на проценты

Пример 73. После двух последовательных повышений зарплата составила 15/8 частей от первоначальной. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было в процентном отношении вдвое больше первого?

Решение. Обозначим сумму первоначальной зарплаты A, первое повышение x (%). Тогда $\dfrac{Ax}{100}$ сумма, на которую повысилась зарплата после первого повышения, а зарплата после первого повышения $A + \dfrac{Ax}{100}$. Второму повышению зарплаты соответствует величина $2x$. Тогда сумма, на которую повысилась зарплата во второй раз, равна

$$(A + Ax/100)\frac{2x}{100}.$$

Соответственно, зарплата после второго повышения равна

$$(A + A\frac{x}{100})\frac{2x}{100} + (A + A\frac{x}{100})$$

или по условию задачи $\dfrac{15A}{8}$.

Итак, получим

$$(A + A\frac{x}{100})\frac{2x}{100} + (A + A\frac{x}{100}) = \frac{15}{8}A;$$

$$A\left[\left(1 + \frac{x}{100}\right)\frac{2x}{100} + \left(1 + \frac{x}{100}\right)\right] = \frac{15}{8}A;$$

$$\frac{x}{50} + \frac{x^2}{50 \cdot 100} + 1 + \frac{x}{100} - \frac{15}{8} = 0.$$

Умножим обе части уравнения на $50 \cdot 100$, тогда имеет

$x^2 + 150x - 25^2 \cdot 7 = 0;$

$x_{1,2} = -75 \pm \sqrt{75^2 + 25 \cdot 25 \cdot 7} = -75 \pm \sqrt{25^2 \cdot 3^2 + 25^2 \cdot 7} =$

$= -75 \pm 25\sqrt{16} = -75 \pm 100;$

$x_1 = 25; \qquad x_2 = -175.$

Из условия задачи $x > 0$, поэтому $x = -175$ – посторонний корень; $x = 25$ %.

Ответ: 25 %.

3.22. Геометрия. Планиметрия

Пример 74. Найти углы треугольника, если его стороны равны 4 см, 6 см, 6 см.

Решение. На Рис. 26 изображен ΔABC, у которого $AB=BC=6$ см, $AC=4$ см. Найдем $\angle A, \angle B, \angle C$.

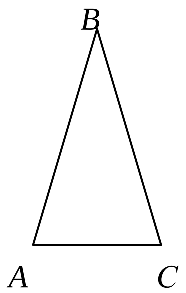


Рис. 26

Согласно условию задачи, ΔABC является равнобедренным. Следовательно, $\angle A = \angle C$. Запишем теорему косинусов для стороны C:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$, $16 = 36 + 36 - 72\cos B$.

Отсюда имеем $\cos B = \dfrac{7}{9}$ и $\angle B = \arccos\dfrac{7}{9}$.

При этом $\sin B = \sqrt{1 - \dfrac{49}{81}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. Синус $\angle A$ найдем по теореме синусов: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$, откуда $\sin A = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Следовательно, $\angle A = \angle C = \arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Пример 75. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если одна из его сторон равна 51, а диагонали равны 40 и 74.

Решение. Рассмотрим ΔAOD (Рис. 27), в котором $\angle AOD = \varphi$, $AO = 37$, а $OD = 20$, так как в точке пересечения диагонали параллелограмма:

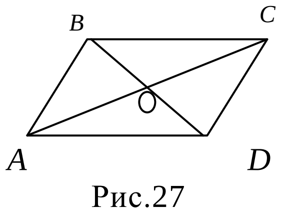


Рис.27

$51^2 = 37^2 + 20^2 - 2 \cdot 37 \cdot 20\cos\varphi.$

Определим из этого выражения $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{37^2 + 20^2 - 51^2}{2 \cdot 37 \cdot 20} = -\frac{104}{185};$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{104}{185}\right)^2} = \frac{153}{185}.$$

Площадь параллелограмма найдем по формуле $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где $d_1 = AC = 74$, $d_2 = BD = 40$.

Следовательно, площадь параллелограмма равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 74 \cdot 40 \cdot \frac{153}{185} = 1224.$$

Ответ: 1224.

Пример 76. Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит ее на отрезки, разность которых равна 2 см. Найдите основания трапеции.

Решение. На Рис. 28 изображена трапеция *ABCD*, у которой *MN*−средняя линия. *MN*=10 см, *AC*−диагональ, *KN*-*MK*=2 см. Найдем *BC* и *AD*.

Обозначим основания трапеции: *BC*=*x*, *AD*=*y*.

По свойству средней линии трапеции: $\frac{1}{2}(x+y)=10$, то есть $x+y=20$.

В треугольнике *ACD* отрезок *KN*−средняя линия, значит, $KN=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}y$.

MK - средняя линия в ΔCAB, значит, $MK=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}x$.

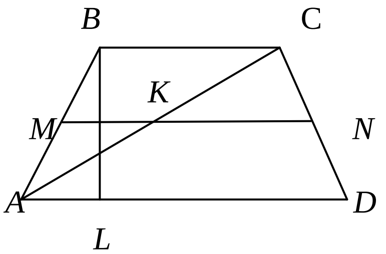


Рис. 28

По условию: *KN*–*MK*=2 или $\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x=2$.

Отсюда имеем $y-x=4$.

Решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x=y=20, \\ y-x=4. \end{cases}$$

Отсюда получим: $y=12$; $x=8$, то есть *BC*=8 см, *AD*=12 см.

Ответ: *BC*=8 см, *AD*=12 см.

Пример 77. В круг вписан правильный треугольник. Найдите отношение площади треугольника к площади круга.

Решение. На Рис. 29 изображен правильный ΔABC, который вписан в круг.

Найдем $\frac{S_{ABC}}{S}$, где *S* – площадь круга.

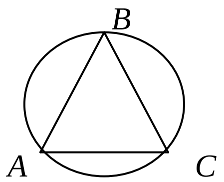


Рис. 29

Обозначим радиус круга через *R*. Тогда из соотношения $R=\frac{AC}{2\sin 60^{\circ}}$ получим $AC=R\sqrt{3}$. Площадь треугольника равна $S_{ABC}=\frac{3AC^2}{4\operatorname{tg}60^{\circ}}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Площадь круга равна $S=\pi R^2$. Используя полученные формулы, найдем, что отношение площади треугольника к площади круга равно:

$$\frac{S_{ABC}}{S}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Пример 78. Найти длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами *a* и *b* (Рис. 30).

Решение. Обозначим катеты прямоугольного треугольника *AB*=*b*, *BC*=*a*.

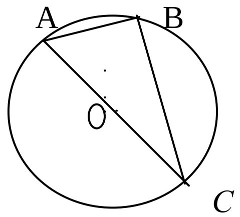


Рис.30

Прямой ΔABC опирается на диаметр AC**,** тогда по теореме Пифагора получим:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$, то есть $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Радиус окружности $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Найдем длину окружности, описанной около ΔABC:

$$L = 2\pi R = 2\pi \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \pi\sqrt{a^2 + b^2} .$$

Длина окружности $L = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ответ: $\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

3.23. Задачи с параметром

Пример 79. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin^2 x\left(2\,\mathrm{ctg}^2\, x - 3\right) - \cos 2x = 2 - a$$

имеет корни.

Решение. ОДЗ уравнения: $\sin x \neq 0$, так как в уравнение входит величина $\mathrm{ctg}\, x = \cos x / \sin x$. Упростим уравнение, приведя к общему знаменателю и заменив $\cos 2x$ на $2\cos^2 x - 1$:

$$\sin^2 x \frac{2\cos^2 x - 3\sin^2 x}{\sin^2 x} - \left(2\cos^2 x - 1\right) = 2 - a ,$$

$$2\cos^2 x - 3\sin^2 x - 2\cos^2 x + 1 = 2 - a \;,$$

$$3\sin^2 x = a - 1,\ \sin^2 x = \frac{a-1}{3}.$$

С учетом неравенства $0 \le \sin^2 x \le 1$ и ОДЗ, получим:

$$0 < \sin^2 x \le 1,\ 0 < \frac{a-1}{3} \le 1,\ 0 < a - 1 \le 3,\ 1 < a \le 4.$$

Ответ: $1 < a \le 4$.

Пример 80. Найти все значения параметра a, при которых парабола $y = x^2 - 3x + 3a$ и прямая $y = x + 2\,|\,a - 2\,|$ не имеют общих точек.

Решение. Используем другую формулировку данной задачи: при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 3a, \\ y = x + 2\,|\,a - 2\,|; \end{cases}$$

не имеет решений?

Вычитая из первого уравнения второе, получим уравнение $x^2 - 4x + 3a - 2\,|\,a - 2\,| = 0$, которое не должно иметь решений, то есть его дискриминант должен быть меньше нуля: $D = 4 - 3a + 2\,|\,a - 2\,| < 0$.

Для решения этого неравенства рассмотрим два случая:

1) $a \ge 2$, $|\,a - 2\,| = a - 2$. Подставляя в неравенство $a - 2$, получим $4 - 3a + 2a - 4 < 0$, $a > 0$ и систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \ge 2; \end{cases}\quad a \ge 2 .$$

2) $a<2$. Тогда $4-3a-2a+4<0$, $5a>8$, $a>\frac{8}{5}$. Объединяя условие $a>\frac{8}{5}$ с условием $a<2$, получим $\frac{8}{5}<a<2$.

Решения первого и второго случаев $a\ge 2$ и $\frac{8}{5}<a<2$ запишем как один интервал: $a>\frac{8}{5}$, то есть имеем $a\in\left(\frac{8}{5};+\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{8}{5};+\infty\right)$.

Пример 81. При каких значениях параметра *a* неравенство

$$(a+1)x^2-2(a-1)x+3a+1<0$$

выполняется при всех значениях переменной *x*?

Решение. Неравенство $Ax^2+Bx+C<0$ выполняется при всех значениях переменной *x*, если $A<0$ и $D=B^2-4AC<0$. Выпишем эти условия для данного неравенства: $a+1<0$ и $D=4(a-1)^2-4(a+1)(3a+1)<0$. Решим второе неравенство:

$(a-1)^2-(a+1)(3a+1)<0$, $a^2-2a+1-3a^2-4a-1<0$,

$-2a^2-6a<0$ **,** $a^2+3a>0$, $\left[\begin{array}{l} a>0, \\ a<-3. \end{array}\right.$

Оба условия должны выполняться одновременно, то есть

$\left\{\begin{array}{l} a+1<0, \\ \left[\begin{array}{l} a>0, \\ a<-3; \end{array}\right. \end{array}\right.$ $a<-3$, то есть получаем $a\in(-\infty;-3)$.

Ответ: $(-\infty;-3)$.

4. Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить (1 – 15):

1. $\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2{,}2\cdot\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}$; ***Ответ:*** 2.

2. $\frac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\left(\sqrt{6{,}3/1{,}7}-\sqrt{1{,}7/6{,}3}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}$; ***Ответ:*** 1.

3. $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$; ***Ответ:*** 12.

4. $\sqrt{\sqrt{b}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{2}}$; ***Ответ:*** $b-2$.

5. $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$; ***Ответ:*** 14.

6. $\sqrt{10-\sqrt{96}}-\sqrt{10+\sqrt{96}}$; ***Ответ:*** -4.

7. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\log_{16}\log_5 625$; ***Ответ:*** 2.

8. $\left(\frac{\lg 16}{\lg 12}+\frac{\log_7 9}{\log_7 12}\right)\cdot\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}9$; ***Ответ:*** -8.

9. $10^{\frac{1}{3}\lg 8}\cdot 2^{\log_{\sqrt[3]{2}}3}\cdot 5^{\log_{125}27}$; ***Ответ:*** 162.

10. $\sqrt{36^{\frac{1}{\log_5 6}}-25^{\frac{1}{\log_3 5}}}$; ***Ответ:*** 4.

11. $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}$; ***Ответ:*** 0.

12. $\cos\frac{\pi}{6}\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; ***Ответ:*** -1.

13. $2\sin 330^{\circ}+\mathrm{ctg}\,405^{\circ}$; ***Ответ:*** 0.

14. $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; ***Ответ:*** $-\frac{5}{7}$.

15. $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; ***Ответ:*** $\frac{5\sqrt{6}}{12}$.

Упростить выражение (16. – 25.):

16. $\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+3}$; ***Ответ:*** $\frac{x+1}{x+3}$.

17. $\dfrac{2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{x+\frac{x}{x^2-1}}$; ***Ответ:*** $\frac{2}{x}$.

18. $\left(\frac{2}{b^2-4}-\frac{2}{b^2+4b+4}\right):\frac{2}{(b+2)^2}-\frac{2b}{b-2}$; ***Ответ:*** -2.

19. $\left(\frac{q^3+8}{q^3+4q^2+4q}-\frac{2}{q+2}\right)\cdot(q-2)^{-2}$; ***Ответ:*** $\frac{1}{q(q+2)}$.

20. $\dfrac{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$; ***Ответ***: $\frac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$.

21. $\sqrt{a^3}:\sqrt[3]{a}\cdot\frac{\sqrt[6]{a^{-1}}}{a}$; ***Ответ:*** 1.

22. $\dfrac{\sqrt[3]{z^2}:\sqrt{z^3}}{(\sqrt{z\sqrt[3]{z^2}})^{-1}}$; ***Ответ:*** 1.

23. $\dfrac{\sqrt[5]{ab^3}\cdot\sqrt[10]{a^8b}}{a^2\sqrt[10]{b^{-3}}}$; ***Ответ:*** $\frac{b}{a}$.

24. $\dfrac{\sqrt[9]{a^3b}:\sqrt[3]{a^{15}\sqrt[3]{b^{-1}}}}{\sqrt[5]{a^{-25}}\cdot\sqrt[9]{b^2}}$; ***Ответ:*** $\sqrt[3]{a}$.

25. $\sqrt{\frac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt[3]{y^2}}}:\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x^{-6}}}$; ***Ответ:*** $\frac{1}{\sqrt[4]{y}}$.

Решить уравнение или неравенство (26.–75.):

26. $|x-5|=5$; ***Ответ:*** $\{0;10\}$.

27. $|x^2-4x-20|=1$; ***Ответ:*** $\{-3;7;2\pm\sqrt{23}\}$.

28. $|2x+4|=|x+8|$; **Ответ:** $\{-4;4\}$.

29. $x^2-8|x|-9=0$; **Ответ:** $\{-9;9\}$.

30. $7x-3>2x-1$; **Ответ:** $\left(2/5;+\infty\right)$.

31. $-8x+5\ge 2-4x$; **Ответ:** $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$.

32. $2x-9\le 4x-6$; **Ответ:** $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

33. $|2-x|<1$; **Ответ:** $(1;3)$.

34. $|3x-2|\ge 4$; **Ответ:** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty)$.

35. $|13-2x|\ge|4x-9|$; **Ответ:** $\left[-2;3\frac{2}{3}\right]$.

36. $x^2-4x+3>0$; **Ответ:** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

37. $-x^2-5x-4>0$; **Ответ:** $(-4;-1)$

38. $4x^2+4x+1\le 0$; **Ответ:** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

39. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}\ge 0$; **Ответ:** $(-\infty;1]\cup(2;3]\cup(4;+\infty)$

40. $\dfrac{(16-x^2)(x^2+14x+49)}{x^2-6x+9}\ge 0$; **Ответ:** $\{-7\}\cup[-4;3)\cup(3;4]$

41. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}>\dfrac{3}{x-1}$; **Ответ**: $(0;1)\cup(2;4)$.

42. $\sqrt{x-2}=x-4$; **Ответ:** 6.

43. $\sqrt{5x+6}-\sqrt{x+2}=2$; **Ответ:** 2.

44. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-2}$; **Ответ:** 2.

45. $\sqrt{x^2-5x-24}>x-2$; **Ответ:** $(-\infty;-3)$.

46. $\sqrt{2x+9}<3-x$; **Ответ:** $[-4.5;0)$.

47. $\sqrt{x^2+x-12}\le 6-x$; **Ответ:** $(-\infty;-4]\cup[3;3\frac{9}{13}]$.

48. $\sqrt{x^2-7x+12}\le 4-x$; **Ответ:** $\{4\}\cup(-\infty;3]$.

49. $(x-2)\sqrt{x-1}\ge 0$; **Ответ:** $\{1\}\cup[2;+\infty)$.

50. $x^2\ge 8\sqrt{x}$; **Ответ:** $\{0\}\cup[4;+\infty)$.

51. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3}=7^{-7x^2}$; **Ответ:** $\left\{\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right\}$.

52. $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; **Ответ:** 6.

53. $6^{2x-1}+6^{2x+1}=31+6^{2x}$; **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

54. $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$; ***Ответ:*** 2.

55. $5^{2x} - 9^x = 9^{x-1} + 3\cdot 5^{2x-1}$; ***Ответ:*** $\{2;1\}$.

56. $(0{,}4)^{2x^2-3x+6} < (0{,}4)^5$; ***Ответ:*** $(-\infty;0{,}5)\cup(1;+\infty)$.

57. $3^{\frac{5x-2}{2x}} > \frac{1}{9}$; ***Ответ:*** $(-\infty;0)\cup(\frac{2}{9};+\infty)$.

58. $2^x + 2^{1-x} < 3$; ***Ответ:*** $(0;1)$.

59. $(0{,}7)^{\frac{x^2+6x+11}{x-3}} < 1$; ***Ответ:*** $(3;+\infty)$.

60. $7\cdot 6^{-x} - 36^{-x} \geq 6$; ***Ответ:*** $[-1;0]$.

61. $\log_5(3x-11) + \log_5(x-27) = 3 + \log_5 8$; ***Ответ:*** 37.

62. $\log_2(x-5) = 3 - \log_2(x+2)$; ***Ответ:*** 6.

63. $\log_4(x+9) = \log_2(x+3)$; ***Ответ:*** 0.

64. $\log_{(x-6)^2}(x^2+x+3) = \frac{1}{2}$; ***Ответ***: $\{1;-3\}$.

65. $\log_{x-1}(x-7)^2 = 4$; ***Ответ:*** 3.

66. $\log_2(2x^2+x) \geq 0$; ***Ответ:*** $(-\infty;-2)\cup[\frac{1}{2};+\infty)$.

67. $\log_{\frac{1}{3}}(7x-1) > 1$; ***Ответ:*** $\left(\frac{1}{7};\frac{4}{21}\right)$.

68. $\log_3(x-2) \geq 1 + \log_{\frac{1}{3}} x$; ***Ответ:*** $[3;+\infty)$.

69. $\log_{0,1}\log_3\left(\frac{4x^2+22x+30}{x^2+7x+12}\right) < 0$; ***Ответ:*** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

70. $\log_{x-3}(x-1) < 2$; ***Ответ:*** $(3;4)\cup(5;+\infty)$.

71. $2\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x - 3 = 0$; ***Ответ:*** $\pi + 2\pi n,\ n\in Z$.

72. $3\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 4 = 0$; ***Ответ:*** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$.

73. $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x - 2 = 0$; ***Ответ:*** $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in Z$.

74. $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$; ***Ответ:*** $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n\in Z$.

75. $3\cos^2 x - 4\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 2$; ***Ответ:*** $\text{arctg} + m\pi$, $-\frac{\pi}{6} + n\pi,\ m,n\in Z$.

Решить задачи (76. – 90.).

76. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч, а через полчаса после нее в том же направлении вышел катер со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если катер пришел в город на 1,5 ч раньше лодки?

Ответ: 60 км.

77. Два автобуса одновременно выехали из города и направились к озеру. Расстояние между городом и озером 48 км. Первый автобус прибыл к озеру на 10 мин раньше второго, причем средняя скорость второго меньше средней скорости первого на 4 км/ч. Вычислить скорости автобусов.

Ответ:32 км/ч; 36 км/ч.

78. Две группы туристов должны идти навстречу друг другу из турбаз А и В, расстояние между которыми 30 км. Если первая группа выйдет на 2 ч раньше второй, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второй группы. Если же вторая группа выйдет на 2ч раньше, чем первая, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первой группы. С какой средней скоростью идет каждая группа?

Ответ:5 км/ч;3 км/ч.

79. Порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы должна относиться к массе селитры как 0,2:1,3, а масса угля должна составлять $11\frac{1}{9}\%$ массы серы и селитры вместе. Сколько пойдет каждого из веществ на приготовление 25 кг пороха?

Ответ:серы – 3 кг;
селитры – 19,5 кг; угля − 2,5 кг.

80. В магазин поступили учебники по физике и математике, когда продали 50 % учебников по математике и 20 % учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг, то учебников по математике осталось в 3 раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике и сколько по физике поступило в магазин?

Ответ:720 и 150.

81. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15 %, а второй – на 25 %, вместе за смену они стали изготовливать 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

Ответ:46 и 40.

82. Найти три числа, если первое составляет 80 % второго, второе относится к третьему как $\frac{1}{2}:\frac{9}{20}$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

Ответ:80; 100; 90.

83. . В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найти угол B треугольника.

Ответ:900.

84. Основание равнобедренного треугольника равно 4 см, а боковая сторона равна 7 см. Найти медиану, проведенную к боковой стороне.

Ответ:4,5см.

85. Острый угол параллелограмма равен 600, а меньшая диагональ равная $2\sqrt{3}$ см, перпендикулярна стороне. Найти площадь параллелограмма.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см^2.

86. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если основания равны 16 см и 20 см.

Ответ:324см^2.

87. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу точкой касания на отрезки, равные 3 см и 10 см. Найдите длину окружности.

Ответ:4πсм.

88. В равнобедренном треугольнике основание равно 24 см, а боковая сторона 15 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

Ответ:4 см, 12,5 см.

89. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2 см. Найти площадь ромба.

Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см^2.

90. Около равнобедренной трапеции с меньшим основанием 10 см и высотой 12 см описана окружность, центр которой лежит на большем основании. Найти площадь круга.

Ответ:169 πсм^2.

5. Примеры экзаменационных билетов

Вариант 1

1. Упростить выражение $\left(\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{1/2}+b^{1/2}}\right)\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$ при $a, b>0,\ \ a\neq b$.

2. Решить уравнение $2^x-4\cdot 2^{-x}=3$.

3. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{2-x}{x+3}$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.

4. Даны три первых члена геометрической прогрессии –27/40; 9/20; –3/10. Найти номер члена этой прогрессии, равного 4/45.

5. Два туриста выезжают одновременно на мопедах из пунктов M и N навстречу друг другу. Расстояние MN равно 50 км. Встретившись через 1 ч, они продолжают путь с той же скоростью. Первый приехал в пункт N на 50 мин раньше, чем второй в пункт M. Найти скорость, с которой ехали туристы.

6. Решить уравнение $\log_2 182-\log_2(5-x)=\log_2(11-x)+1$.

7. Решить уравнение $2\sin^3 x-3\sin x\cos x=0$.

8. Решить неравенство $\sqrt{x^2-7x+12}\geq 5-x$.

9. Решить неравенство $\dfrac{10}{|\,2\log_3 x-1\,|+2}+|\,2\log_3 x-1|\ <\ 5$.

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

Решения.

1. Прежде чем производить вычисление, упростим каждую дробь, используя формулы

$$m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)\ \text{ и }\ m^2-n^2=(m-n)(m+n).$$

Тогда

$$\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a-b}=\frac{(a^{1/2})^3+(b^{1/2})^3}{(a^{1/2})^2-(b^{1/2})^2}=\frac{(a^{1/2}+b^{1/2})(a-a^{1/2}b^{1/2}+b)}{(a^{1/2}+b^{1/2})(a^{1/2}-b^{1/2})}=\frac{a-a^{1/2}b^{1/2}+b}{a^{1/2}-b^{1/2}};$$

$$\frac{a-b}{a^{1/2}+b^{1/2}}=\frac{(a^{1/2}+b^{1/2})(a^{1/2}-b^{1/2})}{a^{1/2}+b^{1/2}}=a^{1/2}-b^{1/2};$$

$$\left(\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-b}-\frac{a-b}{a^{1/2}+b^{1/2}}\right)\frac{a-b}{\sqrt{ab}}=\left(\frac{a-(ab)^{1/2}+b}{a^{1/2}-b^{1/2}}-(a^{1/2}-b^{1/2})\right)\frac{a-b}{\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{a-(ab)^{1/2}+b-(a^{1/2}-b^{1/2})^2}{a^{1/2}-b^{1/2}}\ \frac{a-b}{\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+b-a+2\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\ \frac{a-b}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\ \frac{a-b}{\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Ответ: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

2. ОДЗ: $x\in R$.

Обозначим $2^x = t$ $(t > 0)$. Тогда $2^{-x} = 1/t$ и уравнение примет вид $t - 4/t = 3$, откуда $t^2 - 3t - 4 = 0$. По теореме Виета $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3, \\ t_1 \cdot t_2 = -4. \end{cases}$ Тогда $t_1 = 4,\ t_2 = -1$, но t_2 – посторонний корень, так как не удовлетворяет условию $t > 0$. Следовательно, $t = 2^x = 4,\ 2^x = 2^2,\ x = 2$.

Ответ:2.

3. Уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем

$$f'(x) = \left(\frac{2-x}{x+3}\right)' = \frac{(2-x)'(x+3) - (2-x)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{-(x+3) - (2-x)}{(x+3)^2} = \frac{-5}{(x+3)^2}.$$

Вычислим $f'(x_0) = f'(-2) = -5$ и $y_0 = f(-2) = 4$. Запишем уравнение касательной $y - 4 = -5(x+2),\ 5x + y + 6 = 0$.

Ответ: $5x + y + 6 = 0$.

4. Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Обозначим $b_1 = -27/40$, тогда $b_2 = b_1 q = 9/20$. Знаменатель прогрессии $q = \dfrac{b_2}{b_1} = -\dfrac{2}{3}$, а n-й член

$$b_n = b_1 q^{n-1} = \frac{-27}{40}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

По условию $b_n = 4/45$. Упрощая равенство

$$\frac{-27}{40}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{45},$$

вычислим

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\frac{32}{243} = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6.$$

Ответ:6.

5. Обозначим v_1 и v_2 – скорость первого и второго туристов соответственно. Тогда $v_1 + v_2 = 50$ км (вместе они проехали весь путь за 1 ч); $50/v_1$ (ч) – время, за которое первый турист проехал весь путь; $50/v_2$ (ч)– время, за которое второй турист проехал весь путь. По условию

$$\frac{50}{v_2} - \frac{50}{v_1} = 50 \text{ мин} = \frac{5}{6} \text{ ч}.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 50, \\ \dfrac{50}{v_2} - \dfrac{50}{v_1} = \dfrac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 + v_2 = 50, \\ \dfrac{50(v_1 - v_2)}{v_1 v_2} = \dfrac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = 50 - v_1, \\ 50(v_1 - v_2) = \dfrac{5}{6} v_1 v_2. \end{cases}$$

Подставим v_2 во 2-е уравнение, умножив его одновременно на 6/5:

$60(v_1 + v_1 - 50) = v_1(50 - v_1);$

$120v_1 - 3000 = 50v_1 - v_2{}^2 \Rightarrow v_1{}^2 + 70v_1 - 3000 = 0;$

$v_1 = -35 \pm \sqrt{1225 + 3000} = -35 \pm 65.$

$v_1 > 0, \quad v_1 = 30\ ,\ v_2 = 20.$

Ответ:v_1 = 30 км/ч, v_2 = 20 км/ч.

6. ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0, \\ 11-x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<5, \\ x<11; \end{cases}$ $x<5.$

Представим 1 = $\log_2 2$ и воспользуемся формулами:

$$\log_a x+\log_a y=\log_a xy, \quad \log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}.$$

Тогда получим:

$$\log_2 182-\log_2(5-x)=\log_2(11-x)+\log_2 2,$$

$$\log_2 \frac{182}{5-x}=\log_2 2(11-x).$$

Отсюда, потенцируя, находим $182/(5-x)=2(11-x)$; умножая на $(5-x)$ и деля на 2 обе части уравнения, получим:

$$91=(11-x)(5-x),\ 91=55-11x-5x+x^2,\ x^2-16x-36=0.$$

Находим корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ по формуле:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Получим $x_{1,2}=8\pm\sqrt{64+36}=8\pm 10;$ $x_1=18$, что не подходит по ОДЗ; $x_2=-2$.

Ответ: –2.

7. Вынесем $\sin x$ за скобки: $\sin x(2\sin^2 x-3\cos x)=0$. Заменим $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, получим $\sin x(2-2\cos^2 x-3\cos x)=0.$

Отсюда $\sin x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$, или $2\cos^2 x+3\cos x-2=0.$

Обозначим $\cos x=y$; $|y|\le 1$ (так как $|\cos x|\le 1$). Тогда имеем $2y^2+3y-2=0$.

Находим корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}.$$

Корень $y_1=-2$ не удовлетворяет условию $|y|\le 1$, корень $y_2=\frac{1}{2}$.

Тогда получим: $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\pi k;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ k,n\in Z.$

8. ОДЗ: $x^2-7x+12\ge 0$, $(x-3)(x-4)\ge 0$, $x\in(-\infty,3]\cup[4,\infty)$.

Для решения неравенства рассмотрим два случая:

1) $5-x<0$, $x>5$.

В левой части стоит неотрицательное выражение, а в правой – отрицательное, и неравенство верно для всех x, удовлетворяющих условиям: $x\in(-\infty,3]\cup[4,\infty)$ и $x>5$, то есть $x>5$.

2) $5-x\ge 0$, $x\le 5$.

Обе части неравенства возведем в квадрат, так как они обе неотрицательны.

Тогда имеем $x^2-7x+12\ge(5-x)^2$, $x^2-7x+12\ge x^2-10x+25$, $3x\ge 13$, $x\ge\frac{13}{3}$.

Учитывая, что $x\le 5$ и ОДЗ, получим $\frac{13}{3}\le x\le 5$.

Объединив первый и второй случаи, запишем ответ: $\frac{13}{3} \le x \le 5$ или $x > 5$. Оба неравенства объединяются в одно неравенство: $x \ge \frac{13}{3}$, то есть имеем $x \in \left[\frac{13}{3};+\infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{13}{3};+\infty\right)$.

9. ОДЗ: $x > 0$.

Обозначим $|2\log_3 x - 1| = t$, $t \ge 0$, тогда неравенство примет вид $\frac{10}{t+2} + t < 5$.

Так как $t \ge 0$, то $t + 2 > 0$, следовательно, можно умножить обе части неравенства на $(t+2)$.

Получим $10 + t^2 + 2t < 5t + 10$, $t^2 - 3t < 0$, $0 < t < 3$.

Тогда имеем, $0 < |2\log_3 x - 1| < 3$. Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} |2\log_3 x - 1| > 0, \\ |2\log_3 x - 1| < 3. \end{cases}$$

Решим каждое из них отдельно.

1) $|2\log_3 x - 1| > 0$, $2\log_3 x - 1 \ne 0$, $\log_3 x \ne 0{,}5$, $x \ne \sqrt{3}$.

2) $|2\log_3 x - 1| < 3$, $-3 < 2\log_3 x - 1 < 3$, $-2 < 2\log_3 x < 4$, $-1 < \log_3 x < 2$, $\frac{1}{3} < x < 9$.

Объединяя решения неравенств и учитывая ОДЗ, получим $\frac{1}{3} < x < 9, x \ne \sqrt{3}$, то есть $x \in \left(\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 9\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 9\right)$.

10. ОДЗ: $x \in R, y \in R$.

Разложим уравнения системы на множители:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 65, \\ xy(x+y) = 20. \end{cases}$$

Так как $x + y \ne 0$ (при $x = -y$ система решений не имеет), то, разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{65}{20},\ 4x^2 - 4xy + 4y^2 = 13xy,\ 4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0.$$

При $x = 0$ или $y = 0$ система решений не имеет (проверяем непосредственной подстановкой $x = 0$ или $y = 0$ во второе уравнение). Поэтому можно разделить обе части последнего уравнения на $y^2 \ne 0$. Получим

$$4\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 4 = 0.$$

Обозначив $\frac{x}{y} = t$ $(t \ne 0)$, решим уравнение: $4t^2 - 17t + 4 = 0$, $t_1 = 4$, $t_2 = \frac{1}{4}$.

Итак, $\dfrac{x}{y}=4,\ \ x=4y,\ 64y^3+y^3=65,\ 65y^3=65,\ y=1,\ \ x=4$. Аналогично, при $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{4}$ получим: $y=4$ и $x=1$.

Для проверки подставим $x=4$ и $y=1$ в первое и второе уравнения:

$64+1=65,\ 65\equiv 65$;

$16\cdot 1+1\cdot 4=20,\ 20\equiv 20$,

то есть $x=4$ и $y=1$ является решением системы. Выполнив проверку для $x=1,\ y=4$, получим, что и эта пара решений удовлетворяет системе уравнений (очевидно, в силу симметричности заданной системы).

Ответ: $\{(4,1),(1,4)\}$.

Вариант 2

1. Упростить выражение $\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}$ при $x,y>0,\ \ x\neq y$.

2. При каком значении параметра a функция $f(x)=2x^2+ax+8$ будет четной?

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$ на отрезке [0,8].

4. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма равна 6, а сумма первых пяти членов равна 93/16.

5. Одна труба может наполнить бак водой на 10 мин быстрее другой. За какое время может наполнить этот бак каждая труба, если при совместном действии этих труб в течение 8 мин было заполнено 2/3 бака?

6. Решить уравнение $\log_2(9-2^x)=3-x.$

7. Решить уравнение $\cos 2x+\sin 3x=\sin x.$

8. Найти область определения функции $y=\dfrac{\log_5(2-2^{\sin x})}{3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{-x}}}$.

9. Решить неравенство $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2>0$.

10. Решить систему $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4; \\ \log_4 x-\log_4 y=1. \end{cases}$

Решения.

1. Упростим каждый из сомножителей и обязательно от отрицательных степеней, учитывая, что $x^{-1}=\dfrac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}};$$

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\frac{x+y}{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})}.$$

Тогда, пользуясь формулами $xy=(\sqrt{xy})^2$ и $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2==\ x-2\sqrt{xy}+y$, получим:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}\frac{x^{-1}+y^{-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\,\frac{x+y}{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$

$$=\frac{x+y}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}-\frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

2. Функция является четной, если $f(x) = f(-x)$ для всякого $x \in$ ООФ.
Найдем $f(-x) = 2(-x)^2 + a(-x) + 8 = 2x^2 - ax + 8$ и приравняем значения $f(x)$ и $f(-x)$. Получим $2x^2+ax+8=2x^2-ax+8,\ \ 2ax=0,\ a=0.$.

Ответ:0.

3. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0{,}8]$, надо найти ее стационарные точки на интервале (0,8), вычислить значения функции в стационарных точках и на концах отрезка и выбрать из полученных значений наибольшее и наименьшее.

Найдем

$$f'(x)=1-3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}=0,$$

$$\sqrt[3]{x^2}=1;\ x^2=1,\ x=\pm1.$$

Итак, имеем две стационарные точки, из которых рассматриваем только $x=1\in(0{,}8)$. Вычислим $f(0)=0,\ f(1)=-2,\ \ f(8)=2$. Сравнив эти три числа, получим ответ.

Ответ: наибольшее значение − $f(8)=2$,
наименьшее − $f(1)=-2$.

4. Обозначим a − первый член прогрессии, q − ее знаменатель. Тогда формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и суммы первых пяти ее членов примут вид

$$S=\frac{a}{1-q};\ S_5=\frac{a\left(1-q^5\right)}{1-q}.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}=6;\\ \dfrac{a\left(1-q^5\right)}{1-q}=\dfrac{93}{16}.\end{cases}$$

Подставив во второе уравнение вместо $\frac{a}{1-q}$ число 6, тогда получим $6\left(1-q^5\right)=\frac{93}{16}$,

$$1-q^5=\frac{93}{6\cdot16}=\frac{31}{32},\ \ q^5=\frac{1}{32},\ \ q=\frac{1}{2},\ a=6\left(1-q\right)=3.$$

Ответ: $a=3,\ q=\frac{1}{2}$.

5. Примем объем бака за единицу. Обозначим t – время заполнения бака 1-й трубой, тогда t + 10 – время заполнения бака 2-й трубой; $1/t$ – скорость работы 1-й трубы; $1/(t + 10)$ – скорость работы 2-й трубы. Так как скорость совместного заполнения бака двумя трубами $1/t + 1/(t + 10)$, то по условию имеем

$$\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+10}\right)8=\frac{2}{3}\cdot 1.$$

Решим уравнение:

$8\dfrac{t+10+t}{t\,(t+10)}=\dfrac{2}{3}$, $8(2t+10)\cdot 3=2t(t+10)$, $12\,(2t+10)=t\,(t+10)$, $24t+120=t^2+10t$,

$t^2-14t-120=0$, $t_{1,\,2}=7\pm\sqrt{49+120}=7\pm 13.$

Так как $t>0$, то $t=20$ мин, $t+10=30$ мин.

Ответ: первая труба заполняет бак за 20 мин, вторая за 30 мин.

6. ОДЗ: $9-2^x>0$, $2^x<9$, $x<\log_2 9$.

Представим $(3-x)$ в виде $3-x=(3-x)\log_2 2=\log_2 2^{3-x}$, $\log_2(9-2^x)=\log_2 2^{3-x}$.

Потенцируя, получим $9-2^x=2^{3-x}$, $9-2^x=2^3\cdot 2^{-x}$.

Обозначим $2^x=y$, $y>0$, $2^{-x}=\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1}{y}$.

Тогда имеем $9-y=8\dfrac{1}{y}$, $9y-y^2=8$, $y^2-9y+8=0$, $y_1=1$, $y_2=8$.

Если $y_1=1$, то $2^x=1$, $2^x=2^0$, $x_1=0$ и $x_1<\log_2 9$.

Если $y_2=8$, то $2^x=8$, $2^x=2^3$, $x_2=3$ и $3=\log_2 8<\log_2 9$.

Следовательно, оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\{0;3\}$.

7. $\cos 2x+\sin 3x=\sin x$,

$\cos 2x+(\sin 3x-\sin x)=0$.

Воспользуемся формулой:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \Rightarrow$$

$\cos 2x+2\sin x\cos 2x=0$,

$\cos 2x(1+2\sin x)=0.$

Отсюда имеем

$$\cos 2x=0,\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Или получим

$1+2\sin x=0$, $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin(-\dfrac{1}{2})+\pi n$, $x=(-1)^n(-\dfrac{\pi}{6})+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2};\ x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ k,n\in Z.$

8. ОДЗ:

$$\begin{cases}2-2^{\sin x}>0;\ x\ge 0;\ -x\ge 0,\\ 3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{-x}}\ne 0.\end{cases}$$

Так как $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{-x}}>0$ при всех x как сумма показательных функций. Далее имеем $2-2^{\sin x}>0$, $2^{\sin x}<2$, $\sin x<1$. Учитывая, что $|\sin x|\le 1$, отбросим значения x, при которых $\sin x=1$, то есть $x\ne \pi/2+2\pi k$. Из условий $x\ge 0,\ -x\ge 0$ получим систему неравенств:

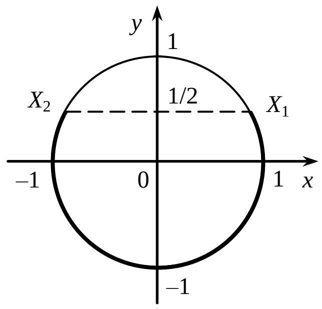


Рис.31

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ x\le 0; \end{cases} \quad x=0.$$

Это значение удовлетворяет условию $2-2^{\sin x}>0$, и так как все четыре условия должны удовлетворяться одновременно, получим $x=0$.

Ответ: область определения функции: $x=0$.

9. Сделаем замену $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=t$, где $-1\le t\le 1$ (ОДЗ).

Получим неравенство $2t^2-5t+2>0$. Найдем корни уравнения $2t^2-5t+2=0$:

$$D=25-16=9,\ t=\frac{5\pm 3}{4},\ t_1=2,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

$$2(t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right)>0,\ \left[\begin{array}{l} t\ge 2, \\ t\le \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, $-1\le t\le \frac{1}{2}$, но $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge -1$ при всех значениях x, следовательно, решим неравенство $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le \frac{1}{2}$.

Решением этого неравенства является выделенная на Рис. 31 область с правой границей $X_1=x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и левой границей $X_2=x-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{6}+2\pi k$.

Тогда для переменной x имеем: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

10. ОДЗ: $x>0,\ y>0$.

Для решения данной системы воспользуемся следующим свойством: $x^{\log_8 y}=y^{\log_8 x}$. Оно доказывается логарифмированием правой и левой части по основанию 8:

$$\log_8(x^{\log_8 y})=\log_8(y^{\log_8 x}),\ \log_8 y\log_8 x=\log_8 x\log_8 y.$$

Тогда первое уравнение будет иметь вид $2x^{\log_8 y}=4$, $x^{\log_8 y}=2$. Прологарифмировав обе части по основанию 8, получим $\log_8(x^{\log_8 y})=\log_8 2$, $\log_8 y\log_8 x=\frac{1}{3}$.

Упростим второе уравнение $\log_4 \frac{x}{y} = \log_4 4$, $\frac{x}{y} = 4$, $x = 4y$ и подставим полученное значение x в первое уравнение $\log_8 y \log_8 4y = \frac{1}{3}$, $\log_8 y(\log_8 4 + \log_8 y) = \frac{1}{3}$.

Обозначив $\log_8 y = t$, получим: $t\left(\frac{2}{3} + t\right) = \frac{1}{3}$, $3t^2 + 2t - 1 = 0$, $t = \frac{-1 \pm 2}{3} \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{3}$.

Соответственно, $\log_8 y = -1$, $y_1 = \frac{1}{8}$, $x_1 = \frac{1}{2}$ и $\log_8 y = \frac{1}{3}$, $y_2 = 2, x_2 = 8$.

Для проверки подставим $y_2 = 2, x_2 = 8$ в оба уравнения:

$$8^{\log_8 2} + 2^{\log_8 8} = 2 + 2 = 4,\ 4 \equiv 4;\ \log_4 8 - \log_4 2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1,\ 1 \equiv 1,$$

то есть x_2, y_2 являются решением системы. Аналогично сделать проверку для первой пары решений.

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right), (8;\ 2)\right\}$.

Вариант 3.

1. Упростить выражение $\left(1 - \frac{x^{-3} - 1}{x^{-1} - 1} : \frac{1 + x + x^2}{x}\right)\left(\frac{1}{1 - x^{-0,5}} - \frac{1}{1 - x^{-1}}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Решить уравнение $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$.

Ответ: 2.

3. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = 4\sin x + \cos 2x$ на промежутке $[0,2\pi]$.

Ответ: $f_{\max}(\pi/2) = 3,\ f_{\min}(3\pi/2) = -5$.

4. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 15. Если от первого и второго чисел отнять по единице, а к третьему прибавить единицу, то новая тройка чисел составляет геометрическую прогрессию. Найти первоначальные числа.

Ответ: 3; 5; 7.

5. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10 см, а его площадь 12 см^2. Найти радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Ответ: 1,2 см.

6. Решить уравнение $\sin 2x + \cos 3x = \cos x$.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}\ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ k \in Z, n \in Z$.

7. Решить уравнение $3^{\lg \operatorname{tg} x} - 2 \cdot 3^{\lg \operatorname{ctg} x + 1} = 1$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 10 + \pi n,\ n \in Z$.

8. Решить уравнение $x\sqrt{x^2 + 15} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2 + 15} = 2$.

Ответ: 1.

9. Найти все решения уравнения $9x^2 - 18|x| + 5 = 0$, принадлежащие области определения функции $y = \ln(x^2 - x - 2)$.

Ответ: $-\frac{5}{3}$.

10. При каких значениях параметра m уравнение $4x^2 - m = 5|x|$ имеет ровно три решения?

Ответ: 0.

Вариант 4.

1. Упростить выражение $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}} - \frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right)^{-1}$.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

2. Решить уравнение $\left(\frac{5}{3}\right)^x + 9\left(\frac{3}{5}\right)^x = 10$.

Ответ: $\left\{0; \log_{\frac{2}{3}} 9\right\}$.

3. В арифметической прогрессии сумма третьего и седьмого членов равна 10. Найти сумму девяти первых членов прогрессии.

Ответ: 45.

4. Дан ромб со стороной a. Его высота делит противоположную сторону в отношении 1 : 2, считая от вершины острого угла. Найти площадь ромба.

Ответ: $\frac{a^2 2\sqrt{2}}{3}$.

5. Два печника могут сложить печь за 12 ч. Если 1-й печник будет работать 2 ч, а 2-й – 3 ч, то они выполнят 20 % всей работы. За сколько часов может сложить печь каждый печник, работая отдельно?

Ответ: 20 ч; 30 ч.

6. Решить уравнение $\lg(2^x + 1) + \lg(2^{x+1} - 1) = 2\lg 3$.

Ответ: 1.

7. Решить систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$

Ответ: $\{(1,8); (8,1)\}$.

8. Решить уравнение $8^x - 3\cdot 4^x - 3\cdot 2^{x+1} + 8 = 0$.

Ответ: $\{0;2\}$.

9. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{2\log_{0,5}(x-3) - \log_{0,5}{}^2(x-3) + 3}$.

Ответ: $\left[\frac{25}{8}; 5\right]$.

10. Решить неравенство $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| - 2\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \geq -1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Вариант 5.

1. Упростить выражение $\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2} + a^{-1/2}} - \frac{a - a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} + \frac{a^2+2}{a^{3/2}}$.

Ответ: 0.

2. Решить уравнение $\lg(x+1)-\frac{1}{2}\lg(5x-1)=\frac{1}{2}\lg x$.

Ответ: 1.

3. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{4}{1+e^x}$ в точке $x_0=0$ и угол между этой касательной и осью *Ox*.

Ответ: $y-2=-x$; $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

4. Является ли число 1790 членом арифметической прогрессии: –5; 1; 7…?

Ответ: нет, не является.

5. Если турист поедет из дома на станцию на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на поезд на 30 мин; если поедет на автобусе со скоростью 40 км/ч, то приедет на 2 ч раньше. Найти расстояние *S* от дома до станции и время *t*, остающееся до отхода поезда в момент выхода туриста из дома.

Ответ: 60 км; 3,5 ч.

6. Решить уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ k,n\in Z$.

7. Решить систему $\begin{cases}2^x+2^y=12,\\ x+y=5.\end{cases}$

Ответ: $\{(2,3);(3,2)\}$.

8. Решить неравенство $(x-2)^{x^2-4}<1$.

Ответ: $(2;3)$.

9. Решить уравнение $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.

Ответ: -2.

10. Решить неравенство $(\log_2 x)^4-\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^5}{4}\right)^2-20\log_2 x+148<0$.

Ответ: $\left(\frac{1}{16},\frac{1}{8}\right)\cup(8,16)$.

6. Рекомендуемый библиографический список

Основная литература

1. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобраз. учреждений / Ш. А. Алимов и др. – М.: Просвещение, 2018. – 463 с.

2. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. пособ. для 10-11 кл. общеобраз. организаций / А. Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 2019. – 384 с.

3. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы: Учеб. для общеобраз. учреждений. – М.: Просвещение, 2017. – 240 с.

4. Погорелов А.В. Геометрия. 10–11 классы: Базовый уровень. Инженерный курс: учебное пособие – М.: Просвещение, 2018. – 175 с.

5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / под ред. М.И. Сканави. – М.: АСТ, 2017. – 608 с.

Дополнительная литература

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие/ 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2008. – 495 с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ, Астрель, 2006. – 509 с.

3. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – 4-е изд. – М.: Оникс, 2011. – 416 с.

4. Дорофеев Г.В. Математика для поступающих в ВУЗы: Пособие. — 4-е изд., стереотип. — М.: Дрофа. 2001. — 672 с.

5. Дорофеев Г.В. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по математике и алгебре и началам анализа за курс средней школы. 11 класс. – М: Дрофа, 2008. – 160 с.

6. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 352 с.

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

1.	ALEXLARIN.NET	http://alexlarin.net/
2.	AB Alleng	http://www.alleng.ru
3.	Открытый банк заданий ЕГЭ по математике	http://mathege.ru
4.	МИФИст	http://live.mephist.ru/show/mathege2010/
5.	Федеральный институт педагогических измерений	http://www.fipi.ru/
6.	Официальный информационный портал ЕГЭ	http://ege.edu.ru/

Содержание